Leikkauspisteet, itseisarvoyhtälöt ja itseisarvoepäyhtälöt lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Tuukka Korpela
2372752
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2019

Sisältö

Johdanto

Kek ja Huijser [12] ovat tutkineet ongelmalähtöisen oppimisen vaikutuksia opiskelijoiden kykyyn ajatella kriittisesti. He antoivat kriittiselle ajatettelijalle kaksi määritelmää. Toisen määritelmän mukaan kriittinen ajattelija tarkoittaa muun muassa henkilöä, jolla on parempi kyky ajatella. Toisen määritelmän mukaan kriittinen ajattelija tarkoittaa henkilöä, jolla on kyky ajatella kriittisesti, analysoida tehokkaasti ja olla hyvä ongelmanratkaisija. Tutkimukset ovat osoittaneet, että kriittistä ajattelukykyä voidaan opettaa ja että opiskelijakeskeisellä opetustavalla voidaan kehittää tehokkaasti opiskelijoiden ajattelukykyä. Erityisen hyväksi tavaksi kehittää opiskelijoiden ajattelutaitoa ja ongelmanratkaisukykyä he nimeävät juuri ongelmalähtöisen oppimisen, jonka avulla voidaan myös opettaa tuntien aihepiireihin kuuluvat asiat.

Teknologian yleistyessä niin työelämässä kuin opetuskäytössä oppikirjojen kehitys on jäänyt hieman jälkeen. Koulun tulisi valmistaa opiskelijoita tulevaisuuteen, joka on yhä digitaalisempi. Tämä vaatii opiskelijoilta yhä enemmän kriittistä ajattelua, analysointitaitoja sekä ongelmanratkaisukykyä. Vuonna 2016 julkaistussa lukion opetussuunnitelman perusteissa [16] korostetaan opiskelijan ajattelun kehittämistä sekä teknologian yhdistämistä opetukseen. Opetussuunnitelmassa lukee muun muassa, että matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää opiskelijoiden kriittistä ajattelua sekä opiskelijoiden päättely- ja ongelmanratkaisutaitoja. Matematiikan opetuksen tavoitteena ei siis ole opettaa pelkkiä asiasisältöjä, vaan kehittää siinä samassa opiskelijoiden kykyä ajatella.

Tämä tutkielma on tehty osana Oulun ja Turun yliopistojen yhteistä Avoin Oppikirja-projektia, jonka tarkoituksena on luoda ilmaisia tuoreimman opetussuunnitelman mukaisia pitkän ja lyhyen matematiikan oppikirjoja lukioiden käytettäväksi. Tutkielma on tehty lukion MAA 5 Analyyttinen geometria-kurssia varten, ja se sisältää kirjan osat leikkauspisteistä sekä itseisarvoyhtälöistä ja -epäyhtälöistä. Tutkielmassa on valmiiden oppimateriaalien lisäksi perusteluosio, jossa on perusteltu kirjan tyyliä, tehtävävalintoja sekä opetettavia asioita sekä opettajanopas, jossa on esitettynä tiiviisti jokaisen kirjan kappaleen tavoitteet sekä pohdintatehtävien opetukselliset tavoitteet ja vastaukset.

Oppikirjan rakenne perustuu ongelmalähtöiseen oppimiseen, jossa opiskelija oppii uudet asiat ratkoen avoimia tai johdateltuja pohdintatehtäviä aiheisiin liittyen. Tavoitteena on, että opiskelija ymmärtää asiat tällä tavoin syvällisemmin ja kehittää samalla omaa ajattelukykyään. Koska useat tutkimukset ovat tuoneet esille ongelmalähtöisen oppimisen epäkohtia ja puutteita oppimisen kannalta, sisältää oppikirja kuitenkin myös esimerkkejä ja mallitehtäviä yleisesti haastavista tehtävätyypeistä. Kirjan osia varten on etsitty paljon tutkimustietoa tutkielman aiheista, ja tutkimuksissa ilmenneisiin yleisiin opiskelijoiden virhelähteisiin on pyritty tarttumaan useissa pohdinta -ja harjoitustehtävissä.

1 Oppikirjan tavoitteet

1.1 Opetussuunnitelma

Lukion opetussuunnitelman perusteissa [16], joita on tullut noudattaa 1.8.2016 lukien, asetettiin kurssin MAA5 Analyyttinen geometria tavoitteiksi

- ymmärtää, kuinka analyyttinen geometria luo yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille
- ymmärtää pistejoukon yhtälön käsitteen ja oppii tutkimaan yhtälöiden avulla pisteitä,suoria, ympyröitä ja paraabeleja
- syventää itseisarvokäsitteen ymmärtämystään ja oppii ratkaisemaan sellaisia yksinkertaisia itseisarvoyhtälöitä ja vastaavia epäyhtälöitä, jotka ovat tyyppiä $|f(x)| = a$ tai $|f(x)| = |g(x)|$
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä pistejoukon yhtälön tutkimisessa sekä yhtälöiden, yhtälöryhmien, itseisarvoyhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemisessa sovellusongelmissa.

Tavotteista kaikki liittyvät läheisesti tämän oppikirjan osan aiheisiin, eli leikkauspisteisiin, itseisarvoyhtälöihin ja -epäyhtälöihin, ja varsinkin kolmas tavoite liittyy juuri tähän kirjan osaan. Tämän lisäksi erityisesti tämän oppikirjan osan osiot pyrkivät toteuttamaan tavoitetta yhteyksien luomisesta geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille.

Lukion opetussuunnitelman perusteet esittää myös yhteisiä tavotteita kaikille pitkän matematiikan kursseille. Tässä oppikirjan osiossa niistä pyritään toteuttamaan erityisesti tavoitteita

- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

Jotta näihin tavoitteisiin päästäisiin, on oppikirjan tämän osan teemoiksi valikoitunut tutkiminen ja pohtiminen. Sisältöjä ei pyritä esittämään opiskelijoille valmiina, vaan opiskelijoille annetaan mahdollisuus saada itse huomata matemaattisia säännönmukaisuuksia ja menetelmiä. Opiskelijoiden matemaattisen kielen käyttöä ja muun muassa päättelytaitoja pyritään kehittämään esimerkiksi keskustelevilla totuusarvotehtävillä, joissa opiskelijat joutuvat perustelemaan omia havaintojaan ja päättelyketjujaan. Kaikkea sisältöä ei jätetä kuitenkaan avoimeksi ja opiskelijoiden oman tutkimisen varaan, vaan kirja sisältää myös valmiiksi ratkaistuja esimerkkitehtäviä yleisesti haastavista aiheista. Tämä johtuu useista pohdintatehtäviä ja esimerkkejä tutkineista tutkimuksista, joista esimerkiksi Kirschner, Sweller ja Clark [13] nostavat esille mallitehtävien ja esimerkkien tarpeen opetuksessa.

1.2 Habits of mind- tavoitteet

Opetussuunnitelmassa asetettujen tavoitteiden lisäksi kirjaa tekemässä olevan projektiryhmän kanssa sovittiin yhteisiä tavotteita oppikirjalle. Tavoitteet valikoituivat artikkelista *Habits of mind: An organizing Principle for Mathematics Curricula* [5]. Artikkeli käsittelee matematiikan koulutusta siitä näkökulmasta, minkälaista sen tulisi olla, jotta opiskelijat olisivat valmiita kohtaamaan tulevaisuuden haasteita. Artikkeli esittelee useita *habits of mindeja*, joiden voidaan ajatella olevan opiskelijoille opetettavia ajatusmalleja, joita pitäisi pyrkiä saavuttamaan. Artikkelin mukaan opiskelijoiden tulisi olla säännönmukaisuuksien etsijöitä (*pattern sniffers*), kokeilijoita (*experimenters*), kuvailijoita (*describers*), nikkareita (*tinkerers*), keksijöitä (*inventors*), visualisoijia (*visualizers*), hypoteesien muodostajia (*conjecturers*) sekä arvaajia (*guessers*). Kyseisistä kahdeksasta tavoitteesta Analyyttisen geometrian oppikirjan tavoitteiksi valittiin, että opiskelijoiden tulisi olla

Visualisoijia, jolla tässä oppikirjan kontekstissa tarkoitetaan sitä, että opiskelijoiden tulisi kyetä kuvallistamaan matemaattisia sisältöjä. Tähän kirjassa pyritään pitämällä jatkuvasti sisältöjen algebrallinen ja graafinen esitys mukana. Ideaalitilanteessa opiskelija kykenee myöskin itse päättelemään, milloin toinen esitystapa on toista esitystapaa hyödyllisempi tehtävän ratkaisemisen kannalta.

Kirjaan on tehty tehtäviä, jotka perustuvat täysin asioiden visuaaliseen esitykseen ja käsitteiden geometriseen ymmärrykseen. Myös kirjassa esiintyvät mallitehtävät on tehty siten, että jos tehtävän ratkaisussa voidaan hyödyntää kuvia tai visuaalisuutta, on kuvia lisätty mallitehtävien ratkaisuihin. Tällä tavoin opiskelijoita ohjataan lisäämään visuaalisuutta myös omiin ratkasuihinsa ja samalla lisäämään ymmärrystään asiasta.

Kuvalijoita, jolloin opiskelijan tulisi kyetä kuvailemaan askeleita prosesseissa, perustelemaan omia päättelyitään sekä kirjoittamaan ylös omia perusteluitaan. Tämän tulisi tapahtua matemaattisella kielellä, jonka hallitseminen mahdollistaa asioiden tarkan kuvailemisen.

Oppikirjassa tähän tavoitteeseen pyritään erityisesti parin kanssa tai ryhmässä tehtävillä keskustelutehtävillä, joissa opiskelijoiden tulee esimerkiksi perustella, onko tehtävässä annettu lause totta.

Kokeilijoita, jolloin matemaattisen ongelman kohdatessaan opiskelijat alkaisivat leikkimään sillä, testaamaan aikaisemmin hyväksi koettuja strategioita ja kokeilemaan, mitä tapahtuu kun parametreja muutetaan. Tärkeää on kuitenkin, että opiskelijat myös epäilevät kokeilemisen kautta saamiaan tuloksia ja ymmärtävät, että onnistunut kokeellinen tulos ei vielä välttämättä todista lausetta todeksi.

Oppikirjassa pyritään tähän tavoitteeseen erityisesti tutkivilla tehtävätyypeillä, joissa opiskelijoita ei välttämättä suoraan ohjata haluttuun suuntaan vaan annetaan heille vapaus tehdä tehtävä omalla tavallaan. Erityisen toivottavaa on, että opiskelijat rohkaistuvat kokeilemaan ja tutkimaan uusia ongelmia Geogebraa apuna käyttäen.

Kyseiset kolme tavoitetta sekä täydentävät että myöskin toteuttavat lukion opetussuunnitelman perusteissa mainittuja tavoitteita. Tavoitteet ovat myöskin luonnollisia valintoja kyseiselle kurssille, jossa tarkoituksena on oppia luomaan yhteyksiä algebrallisten ja geometristen käsitteiden välille.

Artikkelin kolmen tavoitteen lisäksi yhdeksi yhteiseksi tavoitteeksi valitsimme projektiryhmän kanssa joustavuuden. Tällä tarkoitetaan sitä, että opiskelijat oppisivat ratkaisemaan tehtävätyyppejä useammilla eri tavoilla eivätkä olisi sidottuja tiettyyn ratkaisumalliin. Täten opiskelijat olisivat valmiimpia kohtaamaan ei-rutiininomaisia ongelmia sekä kykenisivät myös keskustelemaan matemaattisista sisällöistä ymmärtäen asiaa laajemmin. Joustavuutta pyritään myös lisäämään yhdistelemällä ja vertailemalla kurssin sisältöjä MAA 4 Vektorit-kurssin vastaaviin sisältöihin.

Tässä oppikirjan osassa opiskelijoiden joustavuutta pyritään lisäämään erityisesti kahdella eri tehtävätyypillä. Toisessa tehtävätyypissä opiskelijoita ohjataan tekemään sama tehtävä useammalla eri tavalla ja täten pohtimaan, kumpi ratkaisumalli on itselle soveltuvampi. Toisessa tehtävätyypissä puolestaan esitetään opiskelijoille kaksi erilaista tapaa ratkaista sama tehtävä, ja annetaan opiskelijoille mahdollisuus pohtia, milloin toinen ratkaisutapa on toista parempi.

1.3 Tehtävätyypit

Projektiryhmän kanssa sovittiin myös tietynlaisia yhteisiä tehtävätyyppejä oppikirjalle. Tehtävätyypit valikoituivat artikkelista *Collaborative Learning in Mathematics* [21], jossa esitellyt tehtävätyypit pyrkivät aikaa kestävään osaamiseen ja siihen, että niitä pystyttäisiin käyttämään ei-rutiininomaisissa tilanteissa. Tehtävätyypit antavat opiskelijoille aktiivisemman roolin ja mahdollistavat ongelmien kimppuun käymisen ilman apua ja tukemista. Artikkelin tehtävätyypeistä tällä kurssilla hyödynnettäviksi valittiin

Ratkaisujen vertaaminen-tehtävätyyppi, jossa opiskelijat pääsevät vertailemaan kahta toisistaan eroavaa tapaa tehdä sama tehtävä. Tehtävätyyppi lisää opiskelijoiden joustavuutta sekä varmuutta lähteä ratkaisemaan tehtävää itselleen sopivalla tavalla.

Ratkaisun järjestäminen-tehtävätyyppi, jossa opiskelijoille annetaan tietyn tehtävän ratkaisun välivaiheet, jotka hänen tulee laittaa oikeaan järjestykseen. Tehtävätyyppi kehittää opiskelijan loogista päättelykykyä mahdollistaen samalla uuden ratkaisumallin opettelemisen.

Totta aina, joskus, ei koskaan-tehtävätyyppi, jossa opiskelijan tulee perustella, onko kirjoitettu väite totta millä annetuista ehdoista. Tehtävätyyppi kehittää opiskelijan kykyä selittää, vakuuttaa ja todistaa matemaattisia väitteitä.

Kirjassa eriyttäminen on jätetty pitkälti opettajan vastuulle, mutta osa tehtävätyypeistä on suunniteltu niin, että ne mahdollistavat helposti eriyttämisen erityisesti ylöspäin. Tehtävät on pyritty tekemään siten, että myös luokan heikommilla opiskelijoilla olisi mahdollisuus tehdä niitä, mutta tehtävien viimeiset kohdat sisältävät usein jo haastetta. Tämän lisäksi opettajanosioon on laitettu tehtävien kohdille lisävinkkejä, joilla opettaja voi haastaa tehtävien kohdalla erityisesti nopeampia opiskelijoita.

2 Perusteluosa

2.1 Leikkauspisteet

2.1.1 Leikkauspisteet-kappaleen liitännäisyys muihin kursseihin

Oppikirja sisältää hyvin poikkeuksellisen asioiden esitysjärjestyksen, sillä kirjaan on otettu erillinen kappale leikkauspisteiden käsittelyä varten. Yleisesti leikkauspisteet käsitellään oppikirjoissa osana erilaisia kuvaajia, mutta erottamalla asia omaksi kappaleekseen tarjoaa se mahdollisuuksia vahvistaa samalla opiskelijoiden tietämyksiä myös muista aiheista. Käsittelemällä leikkauspisteitä omassa kappaleessaan on mahdollista linkittää leikkauspisteet tavallisten yhtälöiden ratkaisuun ja ratkaisujen tulkitsemiseen. Täten menettely voi tarjota opiskelijalle tavan ratkaista tavallisia, aikaisemmin opittuja yhtälöitä kuvaajia hyödyntäen, jonka on havaittu parantavan oppimistuloksia useissa eri tutkimuksissa. [15] [11]

Huntleyn ja Millerin tutkimuksessa [10] tutkittiin opiskelijoiden lähestymistapoja algebran tehtäviin, jotka on annettu symbolisessa muodossa. Ongelmat olivat sellaisia yhtälöitä, että niiden ratkaiseminen puhtaasti algebrallisin keinoin on joko hyvin työlästä tai opiskelijan taidoille mahdotonta. Sen sijaan ongelmat ovat helposti ratkaistavissa esimerkiksi juuri selvittämällä yhtälön yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla olevien funktioiden keskinäiset leikkauspisteet. Tutkimuksessa havaittiin, että symbolinen laskeminen oli valtaosan ensimmäinen ratkaisumalli. Kuitenkaan symbolinen laskeminen ei jäänyt yleensä ainoaksi ratkaisumalliksi, vaan opiskelijat kokeilivat myös muita ratkaisumalleja ja käyttivät niitä myös vastausten tarkistamiseksi. Tutkimus myös osoitti, että vain harva opiskelijoista käytti graafista laskinta työkaluna. Kuvaajien piirtämiseen pyritään kannustamaan ja ohjaamaan erityisesti mallitehtävissä A.7 ja A.9 sekä harjoitustehtävissä 2 ja 5.

2.1.2 Leikkauspisteet ja analyyttinen geometria

Leikkauspisteet- kappaleen tarkoituksena on oppia, mitä leikkauspisteellä tarkoitetaan niin graafisessa kuin algebrallisessa mielessä. Samalla kappaleessa syvennetään tietämystä ja yhdistellään aikaisemmissa kappaleissa esiteltyjä käyriä eli suoria, paraabeleita ja ympyröitä. Vaikkakin leikkauspisteet käsitellään hyvin myöhäisessä vaiheessa kirjaa, on niitä sivuttu jo useammassa kappaleessa aiemmin.

Sigmund Tobias tutustui vuonna 1994 aiempaa tietämystä ja opiskelijoiden mielenkiintoa tutkineisiin tutkimuksiin, ja kirjoitti havainnoistaan artikkelin [23]. Artikkelin mukaan aiempaa tietämystä hyödyntävien tehtävien on havaittu herättävän syvempiä ymmärtämisprosesseja, johtavan laajempaa mielikuvituksen käyttöön ja mahdollistavan myös aiheen kannalta muiden relevanttien asioiden assosioimista opittavaan asiaan. Aiempaa tietämystä hyödyntävien tehtävien on havaittu myös herättävän opiskelijoiden kiinnostusta ja helpottavan oppimista. Leikkauspisteiden käsittely aloitetaan näistä syistä pohdintatehtävällä A.1, joka hyödyntää opiskelijan aikaisempaa tietämystä kuvaajista ja leikkauspisteistä ja jonka kaltaisia tehtäviä opiskelijat ovat tehneet myös fysiikan opinnoissaan. Tehtävän on tarkoituksena toimia helppona ja mielenkiintoa herättävänä tehtävänä aiheesta ja antaa opiskelijoille esimerkki siitä, missä he kenties ovat jo aikaisemmin selvittäneet eri leikkauspisteiden koordinaatteja.

Tehtävän loppuosa ja myöhäisemmät pohdintatehtävät edustavat abstraktimpaa osaa, sillä Kaminskin ja hänen tutkimuksiaan hyödyntäneiden jatkotutkimusten [7] mukaan useat konkreettiset esimerkit eivät välttämättä ole aina tehokkain tapa opettaa matemaattisia sisältöjä. Pohdintatehtävissä ymmärtämistä on pyritty lisäämään yhdistämällä leikkauspisteiden käsitettä sen graafiseen merkitykseen, sillä vaikka opiskelijat valitsevatkin usein matemaattisten sisältöjen algebrallisen esitystavan mieluummin kuin graafisen esitystavan, opiskelijat tekevät tehtäviä, joissa on myös graafinen esitys, paremmin kuin pelkästään algebrallista muotoa olevia tehtäviä [15]. Täten onkin hyväksi, että opiskelijat pääsevät pohdintatehtävissä hyödyntämään kuvaajia ja huomaavat niiden helpottavan tehtävien ratkaisua. Samalla edistetään myös lukion opetussuunnitelman [16] tavoitetta siitä, että opiskelija ymmärtää, kuinka analyyttinen geometria luo yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille.

Kappaleeseen on valittu myös mallitehtävä A.7, joka käsittelee yhtälöparia, jolla on ääretön määrä leikkauspisteitä. Huntley, Marcus, Kahan ja Miller [11] tutkivat lukiolaisten kykyä ratkaista kolmea leikkauspistetehtävää, joista yhdessä kaksi suoraa leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä, toisessa kaksi suoraa ovat päällekäin ja kolmannessa suorat eivät leikkaa toisiaan ollenkaan. Oppikirjan mallitehtäväksi valittiin tehtävätyyppi, jossa käyrillä on ääretön määrä leikkauspisteitä, koska tutkimuksessa huomattiin, että ilman graafista lähestymistapaa opiskelijoiden on usein vaikeaa havaita että yhtälöparilla tai yhtälöryhmällä voi olla ääretön määrä ratkaisuja. Tästä syystä mallitehtävässä algebrallisen ratkaisutavan rinnalle on tuotu myös käyrien kuvaajat tehtävän ratkaisun ymmärtämisen edistämiseksi. Tehtävät, joissa käyrillä on ääretön määrä leikkauspisteitä, ovat olleet opiskelijoille vaikeampia kuin tehtävät, joissa käyrät leikkaavat yksittäisissä pisteissä tai eivät leikkaa ollenkaan. Myös itseisarvoepäyhtälöitä käsittelevässä israelilaisessa tutkimuksessa [1] havaittiin, että tehtävät, joissa ratkaisuna saadaan joko kaikki reaaliluvut tai tyhjä joukko, ovat opiskelijoille hankalampia kuin tehtävät, joissa ratkaisu sijoittuu pisteiden välille.

Huntleyn, Marcusin, Kahanin ja Millerin tutkimuksessa [11] havaittiin myös, että vaikka suurin osa opiskelijoista ymmärsi, että lineaarisen yhtälön voi ratkaista graafisesti paikantamalla kahden suoran leikkauspisteen, monet heistä kohtasivat ongelmia vastauksen tulkitsemisessa kun suorat olivat samansuuntaisia tai päällekkäisiä. Tutkimuksen loppuyhteenvedossa todettiin, että opiskelijoiden välinen keskustelu leikkauspistetehtävistä on ollut hyödyllistä, ja he kehottivat sisällyttämään matemaattisia keskustelutehtäviä oppitunteihin. Tästä syystä kappaleeseen on tehty pohdintatehtävä A.4, joka on tarkoitus tehdä parin kanssa ja joka tarjoaa mahdollisuuksia keskustella matemaattisista sisällöistä ja perustella väitteitä omin sanoin. Pohdintatehtävä on totuusarvotehtävä, jonka rakenne perustuu yhdessä valittuun Swanin artikkelin [21] tehtävätyyppiin joka kehittää opiskelijan kykyä selittää, vakuuttaa ja todistaa matemaattisia väitteitä. [11]

Tutkimuksen [11] tekijät kehottivat myös kiinnittämään huomiota opiskelijoiden tehtävienratkaisustrategioihin ja etsimään hyötyjä eri strategioilla saatavista tiedoista. Tämä johtui siitä, että vaikka opiskelijoille tarjotaan uuden opetussuunnitelman mukaisesti samalle asialle useita eri esitystapoja ja mahdollistetaan teknologian hyödyntäminen, monet opiskelijat kamppailevat ei-rutiininomaisten lineaaristen yhtälöiden ratkaisemisessa ja oikeiden työkalujen valitsemisessa. Kirjassa tätä on huomioitu erityisesti näyttämällä, että geometrinen esitystapa sopii hyvin yhtälöiden tarkistamiseen esimerkiksi mallitehtävässä A.7, kun taas leikkauspisteiden tarkkoja koordinaatteja saadaan selville ratkaisemalla yhtälöryhmiä. Samalla kirjassa on esitetty vaihtoehtoisia tapoja ratkaista eri tehtäviä. Esimerkiksi useamman kuin kahden yhtälön sisältävien yhtälöryhmien ratkaisemiseksi on esitelty muutama erilainen tapa ja harjoitustehtävässä 2 opiskelija ohjataan tekemään samantyylinen tehtävä molemmilla tavoilla.

Kirjan kappale sisältää myös suoria ohjeita ja neuvoja Geogebran käytöstä. Tajuddinin, Tarmizin, Kontingin ja Alin tutkimuksessa [22] tutkittiin kahta eri opiskelijaryhmää, joista toinen sai tavanomaista opetusta ja toisen ryhmän opetukseen oli integroitu laskimen käyttöä. Ryhmien oppimistuloksissa oli merkittäviä eroja. Ryhmän, jonka opetukseen oli sisällytetty laskimen käyttöä, keskiarvot olivat parempia kuin toisella ryhmällä. Tutkimuksessa selvisi myös, että laskinryhmän jäsenet olivat joutuneet käyttämään vähemmän vaivaa tehtävien tekemiseen ja he saavuttivat paremman metakognitiivisen ymmärryksen asioista. Tutkimuksen tulokset vahvistivat myös muita positiivisia laskimien käytöstä saatuja tuloksia. Tästä syystä kirjan kappaleessa on mallitehtävä, jossa opastetaan leikkauspisteiden selvittämiseen Geogebran avulla.

2.1.3 Harjoitustehtävät leikkauspisteistä

Koska visuaalisuuden on havaittu parantavan oppimista ja opiskelijoiden tehtävien ratkaisemista [15] [11], on ensimmäiseksi harjoitustehtäväksi valittu leikkauspisteiden lukumäärän selvittämistä kuvaajien avulla. Samalla tehtävä laittaa vielä opiskelijat tutkimaan itse tutkimuksissa [11] vaikeaksi havaittua tehtävätyyppiä, jossa kahdella suoralla on vähemmän tai enemmän kuin yksi leikkauspiste. Myös harjoitustehtävässä 3 tarkastellaan tapausta, jossa leikkauspisteitä on jollakin tavalla poikkeava määrä. Harjoitustehtäväosion tehtävät on jätetty ilman graafista esitystä, jotta opiskelijat rohkaistuisivat opetussuunnitelman [16] tavoitteiden mukaisesti piirtämään ajattelua tukevia kuvia ja hyödyntämään niitä tehtävien tekemisessä ja ratkaisujen tarkistuksessa.

Kirjan yhtenä tarkoituksena on opettaa opiskelijoille joustavuutta ja useiden eri ratkaisutapojen hyötyjä, jonka vuoksi harjoitustehtäväosioon on valittu tehtävä 2, joka neuvoo opiskelijoita tekemään saman tehtävän usealla eri tavalla. Toinen ratkaisutavoista ohjaa opiskelijat käyttämään laskinohjelmia, joiden on havaittu tehostavan oppimista [22]. Samalla tehtävä myös noudattaa kolmen eri leikkauspistetehtävän ratkaisemista tarkastelleen tutkimuksen [11] kehotusta eri ratkaisustrategioiden opettamisesta. Harjoitustehtävässä 3 ei ole ohjattu opiskelijoita tiettyyn ratkaisustrategiaan eikä kielletty laskimen käyttöä, joten tehtävän voisi tehdä myös Geogebralla. Tehtävän funktiot on valittu kuitenkin niin, että tehtävän ratkaiseminen algebrallisesti käsin on mahdollista.

Sen lisäksi, että harjoitustehtävissä tarkastellaan leikkauspisteitä suorien, paraabelien ja ympyröiden kautta sisältää kappale myös tehtävän 5, jossa opiskelijoille tässä vaiheessa ehkä vähemmän tutun näköisiä yhtälöitä, kuten itseisarvoja ja juurifunktioita sisältäviä yhtälöitä ohjataan ratkaisemaan leikkauspisteitä selvittämällä. Samalla kun leikkauspisteet tarjoavat opiskelijoille kenties uudenlaisen tavan ratkaista yhtälöitä, menetelmän avulla opiskelijan voi olla myös helpompi havainnoida, mistä yhtälön ratkaisujen lukumäärä todellisuudessa riippuu ja mitkä tekijät siihen vaikuttavat.

Näitä yhtälöitä sisältävän harjoitustehtävän 5 kohdista ensimmäinen on juuri symbolisessa muodossa esitettyjä tehtäviä tutkineiden Huntleyn ja Millerin [10] artikkelista, ja tehtävän on tarkoituksena osoittaa graafisen esitystavan hyödyllisyys vaikeiden yhtälöiden ratkaisemisen apuna ja tarkastuksessa. Saman harjoitustehtävän 5 (b)-kohta on poimittu Horakin [9] artikkelista, joka käsittelee itseisarvoyhtälöiden ratkaisemista graafisten laskinten avulla. Tehtävä on algebrallisesti hieman haastava ratkaista, varsinkin kun sen ratkaisujoukko on hieman yllättävä. Piirtämällä yhtälön yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolella olevien funktioiden kuvaajat tehtävä on kuitenkin mahdollista ratkaista ilman varsinaista osaamista itseisarvoyhtälöistä ja niiden ratkaisemisesta. Artikkelissa Horak myös toteaa, että graafinen laskin soveltuu hyvin juuri kyseisen kaltaisiin tehtäviin.

Kirjan kappaleen harjoitustehtäviin, kuten myös muiden kappaleiden harjoitustehtäviin, on valittu yksi YO-tehtävä. Jokaiseen kappaleeseen on otettu ylioppilastehtävä, jotta opiskelijoille syntyy käsitys siitä, minkä tyylisiä tehtäviä ylioppilaskoe voi sisältää ja kuinka vaikeita niiden ratkaiseminen on. Koska kirja on rakenteeltaan tavallisesta oppikirjasta poikkeava, opiskelijalle voi helposti syntyä kuva, että kirja ei valmista heitä kunnolla ylioppilaskokeeseen. Harjoitustehtävissä oleva ylioppilastehtävä osoittaa, että oppimillaan taidoilla opiskelijat ovat kykeneviä ratkaisemaan myös vaikeampia ylioppilastehtäviä.

2.2 Itseisarvoyhtälöt

2.2.1 Itseisarvokuvaajat

Vaikka itseisarvon käsite käsiteltiin jo aivan kirjan alkupuolella, päätettiin haastavammat itseisarvoyhtälöt ja -epäyhtälöt siirtää kirjan loppupuolelle leikkauspisteiden jälkeen käsiteltäviksi. Järjestelemällä kappaleet tällä tavalla voidaan nyt haastavampien itseisarvojen käsittelyssä hyödyntää aikaisemmin opittuja tietoja funktioiden kuvaajista. Kuten Ponce [17] toteaa aikaisemmin tehtyjen tutkimusten pohjalta, hankalempia itseisarvoyhtälöitä osataan ratkaista paremmin, kun niiden yhteydessä voidaan hyödyntää kuvaajia. Tästä syystä niiden opettamista tulisi viivyttää kunnes funktioiden piirtämistä on opetettu opiskelijoille.

Samaa mieltä asiasta on myös Arcidiacono [2]. Hän tutki opiskelijoiden kykyä ratkaista itseisarvoyhtälöitä kuvaajien avulla. Hän kokee graafisen lähestymistavan itseisarvoihin helpottaneen asian opettamista. Se demonstroi itseisarvojen ja funktioiden kuvaajien välistä yhteyttä ja antaa opiskelijoille visuaalisen tavan analysoida ongelmia. Vaikka joissain tutkimuksissa onkin havaittu, että opiskelijoilla on vaikeuksia ymmärtää funktioiden ja niiden kuvaajien välistä yhteyttä, on graafisuuden kuitenkin havaittu lisäävän funktioiden ymmärtämistä [14].

Usein itseisarvoyhtälöt- ja epäyhtälöt opetetaan ratkaisemaan proseduraalisesti algebrallisten välivaiheiden avulla. Kun vastaavia tehtävätyyppejä opetetaan ratkaisemaan lukusuoran avulla, se antaa itseisarvoille geometrisen esitystavan joka on luonnostaankin havainnollisempi tapa käsitellä asiaa. Esitystapa antaa opiskelijoille mahdollisuuden käyttää sanallisia esityksiä, johtaa yhteyksiä geometrisen ja symbolisen esityksien väliin ja syventää ymmärrystään itseisarvoista. [6]

Kirjan alussa itseisarvot opetettiin lukusuoran ja etäisyystulkinnan kautta, mutta tässä kirjan kappaleessa itseisarvoyhtälöitä käsitellään koordinaatistossa juuri etäisyyksien avulla. Tarkoituksena on, että opiskelijat kykenisivät täten syventämään ymmärrystään itseisarvoista ja ratkaisemaan hyvinkin vaikeita itseisarvoja sisältäviä tehtäviä graafisen tulkinnan ja etäisyyksien avulla. Kirjassa esitellään kuitenkin myös algebralliset keinot ratkaista itseisarvoyhtälöitä sekä neliöönkorotuksella että itseisarvon määritelmän avulla, mutta pääosin kirjan tässä osassa keskitytään itseisarvoyhtälöiden ratkaisemiseen graafisesti niiden kuvaajien avulla.

Yhdeksäsluokkalaisten itseisarvoyhtälöiden-ja epäyhtälöiden ratkaisuissa ilmenneitä ongelmia tutkineen tutkimuksen [4] mukaan opiskelijat kohtasivat ongelmia erityisesti muotoa $|f(x)| = |g(x)|$ olleissa yhtälöissä. Tutkimuksen tekijät korostavat, että opiskelijat tulisi tehdä tutuiksi itseisarvojen geometrisen määritelmän kanssa huolimatta siitä, millä luokka-asteella asiaa opetetaan. He myös kehottavat opettamaan aihetta menetelmällä, jossa opiskelijalla on aktiivinen ja kyselevä rooli sen sijaan, että opiskelijalle opetettaisiin ulkoa opeteltavia muistisääntöjä. Artikkelin lopussa he toteavat, että itseisarvoja opetettaessa geometrisella lähestymistavalla opiskelijat voivat sisäistää itseisarvojen käsitteen paremmin, ja suosittelevat esimerkiksi Geogebran käyttöä opetuksessa.

Visuaalisen ymmärtämisen vuoksi itseisarvoyhtälöiden käsittely aloitetaan hyödyntämällä Geogebra-sovellusta pohdintatehtävässä B.1, joka pyrkii esittelemään funktioiden ja niiden itseisarvofunktioiden välistä graafista yhteyttä. Siinä missä sovellus hyödyntää itseisarvojen määritelmää etäisyyden osoittajana, se myös liittää tämän määritelmän graafiseen esitykseen ja antaa opiskelijoille visuaalisen tavan analysoida ongelmia. Geogebra-sovelluksista opetuskäytöstä on tehty vain vähän tutkimuksia, mutta esimerkiksi Dijanić ja Trupčević toteavat tutkimuksessaan [8] , että sovellukset mahdollistavat paremmat oppimistulokset sekä käsitteellisessä että proseduraalisessa tietämyksessä kuin perinteiset opetustavat.

Graafisuus kulkee mukana lähes koko teoriaosion ajan opettaen opiskelijoille eri asioita itseisarvojen vaikutuksesta kuvaajiin. Kun ensimmäinen pohdintatehtävä pyrki hyödyntämään juuri itseisarvojen määritelmää etäisyyden ilmaisijana, esimerkki B.2 yhdistää itseisarvojen algebrallisen määritelmän itseisarvojen kuvaajien piirtämiseen. Edelliset tehtävät ja niitä seuraava pohdintatehtävä B.3 tehdään sen takia, että opiskelijoille ei jäisi pelkkää käsitys siitä, että itseisarvot peilaavat funktion x-akselin alapuolisen osan positiiviseksi, vaan myös ymmärtäisivät, miksi näin tapahtuu. Vasta näiden tehtävien jälkeen edetään pohdintatehtävään B.4, joka juuri korostaa tätä itseisarvojen peilaus-ominaisuutta.

Itseisarvoyhtälöiden tarkastelua on tarkoituksenmukaista tehdä leikkauspisteiden käsittelyn jälkeen, koska kuten nyt tiedetään, ovat itseisarvoyhtälöiden ratkaisut todellisuudessa myös käyrien leikkauspisteiden x-koordinaatteja. Näin ollen kappaleet ovat jatkumoa toisilleen ja syventävät ymmärrystä itseisarvoyhtälöistä ja niiden ratkaisujen merkityksestä. Tätä yhteyttä pyritään korostamaan myös pohdintatehtävässä B.5. Yhtenä kappaleen päätarkoituksista on opettaa ratkaisemaan opetussuunnitelmassakin [16] mainittuja muotoa $|f(x)| = |g(x)|$ olevia itseisarvoyhtälöitä, jotka on tutkimuksen [4] mukaan koettu opiskelijoiden toimesta vaikeiksi ja joita tutkimuksentekijät kehottavat lähestymään geometrisen merkityksen kautta. Pohdintatehtävä B.5 pyrkii antamaan opiskelijoille graafisen tavan ratkaista tehtäviä, joka Poncen [17] mukaan auttaa ratkaisemaan myöhemmin esiin tulevia hankalampia itseisarvotehtäviä. Samalla vasta opittuihin leikkauspisteisiin liittyvä tehtävä helpottaa opiskelijoiden oppimista uudesta aiheesta, itseisarvoyhtälöistä [23] .

2.2.2 Itseisarvoyhtälöiden algebrallinen tarkastelu

Itseisarvoyhtälöiden algebrallisen ratkaisutavan oppimisessa hyödynnetään Swanin artikkelista [21] poimittua ratkaisujen vertailu-tehtävätyyppiä, jota tutkineen Jon Starin useat tutkimukset ovat havainneet sen olevan hyödyllinen tehtävätyyppi yhtälöiden oppimiseksi [18] [20]. Starin tutkimusten mukaan tehtävätyyppi kehittää erityisesti opiskelijoiden joustavuutta ja proseduraalista tietämystä. Tätä kautta he myös oppivat valitsemaan tehokkaimman ratkaisutavan tehtävän ratkaisemiseksi. Vaikka useimmat oppikirjat opettavatkin nykyisin itseisarvoyhtälöiden ratkaisemisen neliöönkorotuksella, haluttiin tähän kirjaan tuoda rinnalle myöskin itseisarvojen ratkaiseminen itseisarvon määritelmää hyödyntäen. Tämä tehtiin sen takia, että tehtävien ratkaiseminen määritelmän avulla on neliöönkorotusta käyttökelpoisempi ratkaisumalli tehtäviin, jotka sisältävät korkeamman asteen yhtälöitä. Tätä käyttökelpoisuutta pyritään huomauttamaan myös opiskelijoille pohdintatehtävän B.10 (d)-kohdassa, jossa opiskelijoiden tulee päätellä, kumpi ratkaisumalli sopii paremmin korkeamman asteen itseisarvoyhtälön ratkaisemiseksi.

Algebrallisen ratkaisun opettamiseksi kirja esittelee pohdintatehtävän B.10 lisäksi yhden mallitehtävän. Tutkimuksissa, jotka ovat tutkineet mallitehtäviä (*worked example*) eli tehtäviä, joissa on esitelty valmis tehtävän ratkaisu välivaiheineen on havaittu, että opiskelijat oppivat enemmän algebraa opiskelemalla mallitehtäviä kuin tekemällä itse vastaavia tehtäviä [13]. Erityisesti vasta-alkajille mallitehtävien läpikäyminen on ollut parempi tapa oppia ratkaisustrategioita. Tästä syystä myös aikaisemmin mainittu ratkaisustrategioita opettava pohdintatehtävä B.10 on ratkaisujen vertaamista hyödyntävä tehtävä, joka esittelee opiskelijoille kaksi oikein tehtyä malliratkaisua tehtävään.

2.2.3 Harjoitustehtävät itseisarvoyhtälöistä

Tehtäväosiossa on jälleen tehty tietoinen ratkaisu kirjoittaa tehtävät algebralliseen esitysmuotoon. Tehtävät etenevät loogisessa järjestyksessä itseisarvojen merkkien poistamisesta itseisarvoyhtälöiden piirtämiseen ja lopulta itseisarvoyhtälöiden ratkaisemiseen. Itseisarvofunktioden piirtämistehtävään 8 on laitettu piirrettäväksi funktioita, joiden kuvaajat kulkevat myös x-akselin alapuolella. Koska yleinen itseisarvoihin liittyvä harhakäsitys on, että itseisarvoihin liittyvien tehtävien vastaukset ovat aina positiivisia [6] [1], opiskelijoille voi jäädä helposti käsitys, että itseisarvot sisältävä kuvaaja kulkee aina x-akselin yläpuolella. Tästä syystä tehtävä on tarkoitettu huomauttamaan, että esimerkiksi muotoa $-|f(x)|$ oleva kuvaaja voi kulkea x-akselin alapuolella.

Piirtotehtävien jälkeen edetään itseisarvoyhtälöiden ratkaisemista tarkasteleviin tehtäviin, jotka tarjoavat nyt opiskelijoille mahdollisuuden hyödyntää sekä graafista että algebrallista osaamistaan. Ensimmäisenä harjoitustehtävänä yhtälöiden ratkaisemisesta on tehtävä 9, joka hyödyntää Swanin [21] artikkelista valittua tehtävätyyppiä ratkaisun välivaiheiden järjestämisestä. Näin opiskelijoiden huomio saadaan keskittymään tarkasta laskemisesta loogiseen ajatteluun ja vastauksen rakenteeseen.

Tämän jälkeen tehtävänä on harjoitustehtävä, joka testaa opiskelijoiden joustavuutta ja ratkaisustrategioiden valitsemiskykyä. Samalla se sisältää sanallistetun tehtävän muistutuksena itseisarvon luonteesta etäisyyden ilmoittajana. Viimeiseksi tehtäväksi valikoitui vanha ylioppilastehtävä. Vaikka tehtävä on vanha, testaa se hyvin onko opiskelija sisäistänyt tehtävien ratkaisustrategian mallitehtävän B.7 ja harjoitustehtävän 9 avulla. Samalla tehtävä näyttää, ymmärtääkö opiskelija mistä itseisarvoissa todellisuudessa on kysymys ja miten niiden poistaminen vaikuttaa tapauksessa $|x|x$.

2.3 Itseisarvoepäyhtälöt

2.3.1 Itseisarvoepäyhtälöiden liitännäisyys epäyhtälöihin

Itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisemisessa hyödynnetään paljon tietoja epäyhtälöiden ratkaisemisesta, sillä usein itseisarvoepäyhtälöt muuttuvat ensimmäisen ratkaisuaskeleen jälkeen tavallisiksi epäyhtälöiksi. Epäyhtälöiden ratkaisemisen kuvaajien avulla on havaittu olevan oppimisen kannalta todella menestyksekästä [1], joten kirjassa pyritään hyödyntämään paljon kuvaajia itseisarvoepäyhtälöjen ratkaisemisessa. Itseisarvoepäyhtälöjen ratkaisemista vuonna 2016 tutkinut Ward [25] pitää huonona sitä, että hänen tarkastelemansa oppikirjat esittivät itseisarvon ainoastaan sen algebrallisen määritelmän kautta, ja sen etäisyysmääritelmää tai kuvaajamääritelmää käytettiin ainoastaan työkaluna tehtävien ratkaisemiseksi. Tässä oppikirjan osassa tarkastellaan itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisua erityisesti kuvaajien avulla, ja algebralliset määritelmät otetaan tukemaan tätä tarkastelumallia.

Koska itseisarvoepäyhtälöt purkaantuvat usein epäyhtälöiksi, on kirjan tehtävissä ja teoriaosassa pyritty ottamaan huomioon epäyhtälöiden ratkaisemisessa syntyviä tyyppivirheitä. Tsamir ja Bazzini [24] tutkivat johdonmukaisuuksia ja epäjohdonmukaisuuksia opiskelijoiden vastauksissa algebrallisiin epäyhtälöihin. He havaitsivat, että opiskelijat, jotka kirjoittivat sanallisen vastauksen tehtäviin saivat tehtävän useammin oikein kuin opiskelijat, jotka kirjoittivat vastauksen algebrallisessa muodossa. Tästä syystä itseisarvoepäyhtälöt-kappaleessa lähdetään liikkeelle pohdintatehtävästä C.1, jossa hyvin yksinkertaisen käytännön esimerkin avulla ensin sanallistetaan epäyhtälön vastaus ja vasta tämän jälkeen vastaus kirjoitetaan algebralliseen muotoon.

Pohdintatehtävässä C.3 lähestytään itseisarvojen ratkaisuja kuvaajien avulla. Koska algebrallisten ratkaisujen kirjoittaminen on havaittu vaikeaksi [24], tehtävässä opiskelijat harjoittelevat algebrallisia ratkaisuja valitsemalla oikean ratkaisun valmiiksi kirjoitettujen vaihtoehtojen joukosta. Samassa yhteydessä opiskelijoille opetetaan epäyhtälössä lausekkeiden välissä olevan epäyhtälömerkin vaikutuksesta tehtävän ratkaisuun.

Itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisemista Israelissa tutkineiden Almogin ja Ilanyn [1] tutkimukset ovat osoittaneet, että useat itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisuissa tapahtuvat virheet liittyvät epäyhtälöitä yhdistävien *ja*- ja *tai*-sanojen käyttöön. Tästä syystä kappaleessa on paljon tehtäviä, kuten pohdintatehtävät C.1, C.3 ja C.5, joissa sanavalintaa joudutaan miettimään sekä lisäksi useita muistutuksia oikean sanavalinnan tärkeydestä. Oikean sanavalinnan lisäksi epäyhtälöiden ratkaisemisessa merkittävänä virhelähteenä pidetään sitä, että opiskelijoilla on taipumuksena yhdistää epäyhtälöiden ratkaisu yhtälöiden ratkaisuksi ja lähteä käsittelemään epäyhtälöä kuin yhtälöä. Epäyhtälöiden käsitteleminen yhtälöiden tavoin johtaa useisiin erilaisiin ongelmiin. Tällaisia ovat esimerkiksi se, että opiskelijat eivät onnistu muuttamaan epäyhtälömerkin suuntaa negatiivisella luvulla kerrottaessa sekä neliöllisten epäyhtälöiden ratkaiseminen kuten yhtälöiden ratkaiseminen, jolloin ratkaisua ei osata tulkita oikein vaan ratkaisuna annetaan ainoastaan nollakohdat.

Myös aikaisemmin mainittu Ward [25] nosti esille samoja virhelähteitä itseisarvoepäyhtälöitä käsitelleessä tutkimuksessaan.

Useat tutkimukset osoittavat, että itseisarvoepäyhtälöihin liittyvät virhelähteet ovat samoja, joita opiskelijoilla ilmenee tavallisia epäyhtälöitä ratkaistaessa. Esimerkiksi Espanjassa epäyhtälöiden ratkaisua tutkineiden Blancon ja Garroten [3] tutkimuksissa nousi esille epäyhtälöiden käsitteleminen yhtälöinä sekä oikeiden välimerkkien ja yhdyssanojen käyttö. Yhtenä syynä epäyhtälöiden ja yhtälöiden sekoittamiseen pidetään sitä, että epäyhtälöt opetetaan aina välittömästi yhtälöiden jälkeen [25]. Kirjassa näitä yleisiä virhelähteitä on pyritty karsimaan pois muun muassa yhdistämällä koko ajan itseisarvoepäyhtälöitä niiden kuvaajiin ja opettamalla niiden merkityksiä juuri kuvaajien avulla. Kirjassa epäyhtälöitä ei linkitetä missään vaiheessa suoraan yhtälöiden algebralliseen ratkaisuun, vaan kirjassa keskitytään pohtimaan epäyhtälöiden ratkaisuja niiden geometrisen merkityksen kautta kuvaajien avulla.

2.3.2 Itseisarvoepäyhtälöt

Vuonna 2011 tehdyssä tutkimuksessa tutkittiin itseisarvoepäyhtälöiden opettamista aikuisopiskelijoille kolmella eri tavalla. Itseisarvoepäyhtälöt opetettiin yhdelle ryhmälle algebrallisella lähestymistavalla, toiselle ryhmälle visuaalisella lähestymistavalla ja kolmannelle ryhmälle teoreettisella lähestymistavalla. Ryhmien oppimistuloksia vertailtiin ja havaittiin, että visuaalisella tavalla opetetut opiskelijat saivat enemmän oikeita vastauksia, pohtivat todennäköisemmin ongelmia, huomasivat yhtäläisyyksiä eri ongelmien välillä ja pystyivät järkeilemään vastauksia ilman yleisiä proseduraalisia vastaustekniikoita. [19]

Kun opiskelijat ovat sisäistäneet kahden ensimmäisen pohdintatehtävän jälkeen epäyhtälöiden ratkaisujen kirjoittamisen perusteet, siirrytään pohdintatehtävään C.5, jonka avulla opiskelijat pääsevät kuvaajien avulla ensin pohtimaan, minne väleille itseisarvoyhtälöiden ratkaisut sijoittuvat ja tämän jälkeen selvittämään, miten itseisarvoepäyhtälöstä poistetaan itseisarvomerkit.

Aikaisemmin mainitussa Israelissa tehdyssä tutkimuksessa[1] havaittiin *ja* ja *tai*-sanojen käyttämisen ongelmallisuuden lisäksi, että opiskelijoille tuottaa vaikeuksia ymmärtää, että esimerkiksi $|x|$ voi olla $-x$. Virhe johtuu heidän käsityksestään itseisarvon olemisesta positiivisena lukuna. Saman havainnon teki myös lukusuoran avulla itseisarvojen opetusta tutkinut Curtis. [6] Tähän ongelmaan keskitytään enemmän kirjan alussa olevassa itseisarvoluvussa, ja tässä kirjan osassa ongelmaa sivutaan lähinnä itseisarvokuvaajien yhteydessä.

Almog ja Ilany [1] suosittelivat kirjoittamassaan artikkelissa, että itseisarvoepäyhtälöitä opettaessa kannattaa lähestyä ensin yhtälöä $|x| = a$ tarkastelemalla mitä tapahtuu muuttujan a eri arvoilla ja tämän jälkeen jatkaa keskustelua itseisarvoepäyhtälöiden tapauksessa. Tästä syystä kirjaan valikoitui pohdintatehtävä, joka tutkii lausekkeiden $|f(x)| \leq a$ ja $|f(x)| \geq a$ arvoa, kun $a < 0$ ja $a = 0$. Samalla tehtävä pyrkii tarttumaan opiskelijoiden pohdinnan kautta yleiseen harhakäsitykseen, jonka mukaan epäyhtälön ratkaisuna ei voitaisi saada yksittäistä muuttujan x arvoa [24]. Samaan ongelmakohtaan liittyy myös pohdintatehtävä C.13, joka ohjaa opiskelijoita etsimään itse itseisarvoja sisältäviä epäyhtälöitä, joiden ratkaisujoukot on annettu. Tehtävän (a) -ja (d)-kohdat sisältävät juuri sellaisten itseisarvoepäyhtälöiden keksimisiä, joissa ratkaisuna saadaan ainoastaan yksi tai kaksi muuttujan x arvoa.

Koska kuvaajien ja visuaalisuuden on toistuvasti havaittu parantavan opiskelijoiden kykyä sisäistää itseisarvoja ja samalla syventävän heidän ymmärrystään [1] [2] [6] [9], myös kaksi funktiota sisältäviä itseisarvoepäyhtälöitä lähdetään ratkaisemaan ensin kuvaajien avulla pohdintatehtävässä C.11. Tarkoituksena on, että opiskelijat kehittävät tehtävän avulla visuaalisen tavan ratkaista useampiakin itseisarvoja sisältäviä ongelmia etäisyystulkinnan avulla. Samalla tehtävä korostaa funktioiden itseisarvokäyrien leikkauspisteiden merkitystä ratkaisujen kannalta, josta huomautetaan myös tehtävää seuraavassa tekstiosiossa.

Kirjaan päätettiin ottaa myös jo hieman vanhahtanut tapa ratkaista vaikeampia itseisarvoja sisältäviä yhtälöitä ja epäyhtälöitä, lokerointi. Lokerointitapa opetetaan, jotta opiskelijoilla on mahdollisuus opetella ratkaisemaan vaikeampia yhtälöitä ja epäyhtälöitä myös käsin. Lokerointi opetetaan mallitehtävän kautta, koska mallitehtävien soveltuvuus ratkaisuprosessien opettamiseen on osoitettu hyväksi [13] ja lokerointi ei ole niin oleellinen asia, että siitä olisi ollut syytä tehdä pohdintatehtävää. Kappaleen lopussa esitetään vielä, miten opiskelijat voivat hyödyntää Geogebraa itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisemisessa. Geogebran käytön opettamista on perusteltu jo aikaisemmin leikkauspisteet-kappaleessa laskimen käyttöä opetukseen integroivan tutkimuksen [22] pohjalta.

2.3.3 Harjoitustehtävät itseisarvoepäyhtälöistä

Kirjan viimeiseen kappaleeseen päätyi vain neljä harjoitustehtävää. Aikaisemmin perusteluosassa nostettiin esille itseisarvoepäyhtälöiden ja tavallisten epäyhtälöiden ratkaisemisessa yleisesti tapahtuvia virheitä, joita on pyritty esittämään kappaleen tehtäväosion virheenetsintätehtävässä 12. Tehtävätyyppi on Swanin [21] artikkelista, ja se laittaa opiskelijat kriittiseen rooliin tutkimaan vaihtoehtoisia tapoja ratkaista tehtävä. Tehtävässä tartutaan *ja-* ja *tai-* sanojen käyttöön sekä osoitetaan, että jos epäyhtälön merkkiä ei käännä negatiivisella luvulla kerrottaessa, päädytään väärään ratkaisuun. Tehtävässä on myös yksi ratkaisuyritys, joka pyrkii mallintamaan yhtä epäyhtälöissä tehtävää yleistä virhettä eli epäyhtälöiden käsittelemistä yhtälöinä.

Harjoitustehtävä 13 liittää jälleen visuaalisen esityksen algebralliseen esitykseen, sillä vaikka esitysten yhteys on ollut opiskelijoille vaikeaa hahmottaa [14] on yhteyden hyödyntämisen havaittu parantavan opiskelijoiden osaamista [1]. Tehtävän tekee osittain hankalaksi se, että opiskelijoiden voi olla vaikeaa hahmottaa, että tehtävän punaisella näkyvä ratkaisujoukko vaikuttaa tehtävän vastauksessa ainoastaan epäyhtälön merkkiin.

Harjoitustehtävä 14 testaa opiskelijoiden ymmärrystä oikean ratkaisustrategian valitsemisesta. Opiskelijoille on aikaisemmin huomautettu, että jos neliöön korottamalla itseisarvoepäyhtälö muuttuu neljännen asteen funktioksi, ei neliöön korottamista kannata käyttää. Tehtävässä neliöön korottaminen ei kuitenkaan neliöjuuren vuoksi johda tämänkaltaisiin ongelmiin, joten neliöönkorotus onkin paras ratkaisu tehtävän ratkaisemiseksi.

Viimeiseksi tehtäväksi on valittu tuore ylioppilastehtävä, jonka on tarkoituksena toimia motivoivana tehtävänä, sillä pohdintatehtävien jälkeen tehtävän 15 tekemisen pitäisi olla helppoa. Kyseinen ylioppilastehtävä on myös yksi eniten itseäni ohjannut tekijä itseisarvo- ja itseisarvoepäyhtälökappaleiden teossa, ja kirja sisältääkin useita kyseisestä tehtävästä ideoita saaneita tehtäviä.

Lähdeluettelo

[1] Almog, N., & Ilany, B. (2012). *Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions.* Educational Studies in Mathematics, 81(3), 347-364.

[2] Arcidiacono, M. J. (1983). *A visual approach to absolute value.* Mathematics Teacher, 76(3), 197-201.

[3] Blanco, L. J., & Garrote, M. (2007). *Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in spain.* EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 3(3), 221-229.

[4] Ciltas, A., & Tatar, E. (2011). *Diagnosing Learning Difficulties Related to The Equation and Inequality That Contain Terms with Absolute Value.* International Online Journal of Educational Sciences, 3(2): 461-473

[5] Cuoco, A., Coldenberg, E.P., & Mark, J. (1996). *Habits of mind: An organizing Principle for Mathematics Curricula. Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402

[6] Curtis, M. A. (2016). *Solving Absolute Value Equations and Inequalities on a Number Line.* Electronic Theses, Projects, and Dissertations. 411.

[7] De Bock, D., Deprez, J., Van Dooren, W., Roelens, M. & Verschaffel, L. (2011). *Abstract or concrete examples in learning mathematics? A replication and elaboration of Kaminski, Sloutsky, and Heckler's study.* Journal for Research in Mathematics Education, 42(2), 109-126.

[8] Dijanić, Ž., & Trupčević, G. (2017). *The impact of using GeoGebra interactive applets on conceptual and procedural knowledge.* In The Sixth International Scientific Colloquium Mathematics and Children (Mathematics education as a science and a profession).

[9] Horak, V. M. (1994). *Investigating absolute-value equations with the graphing calculator.* Mathematics Teacher, 87(1), 9-11.

[10] Huntley, M. A., & Davis, J. D. (2008). *High-school students' approaches to solving algebra problems that are posed symbolically: Results from an interview study.* School Science and Mathematics, 108(8), 380-388.

[11] Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). *Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations.* Journal of Mathematical Behavior, 26(2), 115-139.

[12] Kek, M. Y. C. A., & Huijser, H. (2011). *The power of problem-based learning in developing critical thinking skills: Preparing students for tomorrow's digital futures in today's classrooms.* Higher Education Research and Development, 30(3), 329-341.

[13] Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). *Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching.* Educational Psychologist, 41(2), 75-86.

[14] Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). *Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching.* Review of Educational Research, 60(1), 1-64.

[15] Mielicki, M.K. & Wiley, J. (2016). *Alternative Representations in Algebraic Problem Solving: When are Graphs Better Than Equations?* The Journal of Problem Solving: Vol. 9 : Iss. 1 , Article 1.

[16] Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet.* Helsinki: Opetushallitus.

[17] Ponce, G. A. (2008). *Using, Seeing, Feeling, and Doing Absolute Value for Deeper Understanding.* Mathematics Teaching in the Middle School, 14(4), 234-240.

[18] Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). *Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations.* Journal of Educational Psychology, 99(3), 561-574.

[19] Sierpinska, A., Bobos, G. & Pruncut, A. (2011). *Teaching absolute value inequalities to mature students.* Educational Studies in Mathematics, 78(3), 275-305.

[20] Star, J. R., Pollack, C., Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., Newton, K., & Gogolen, C. (2015). *Learning from comparison in algebra.* Contemporary Educational Psychology, 40, 41-54.

[21] Swan, M. (2006). *Collaborative Learning in Mathematics.* Shell Centre for Mathematics Education, University of Nottingham, England.

[22] Tajuddin, N. M., Tarmizi, R. A., Konting, M. M., & Ali, W. Z. W. (2009). *Instructional efficiency of the integration of graphing calculators in teaching and learning mathematics.* International Journal of Instruction, 2(2), 11-30.

[23] Tobias, S. (1994). *Interest, prior knowledge, and learning.* Review of Educational Research, 64(1), 37-54.

[24] Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). *Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single-value' inequalities.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35(6), 793-812.

[25] Ward, J. (2016). *An investigation into the constitution of absolute value inequalities by Grade 12 students in a selection of Western Cape State schools as displayed in students' solutions to a baseline test problem.* University of Cape Town.

3 Opettajan opas

3.1 Tuntijako

Seuraava, suuntaa-antava ajankäyttösuunnitelma on laadittu 75 minuutin oppitunteja varten:

- 1 x 75 min Käyrien väliset leikkauspisteet
- 1 x 75 min Itseisarvoyhtälöt
- 1 x 75 min Itseisarvoepäyhtälöt

Jos aikaa on käytettävissä enemmän, voi olla perusteltua käyttää itseisarvoyhtälöt-ja epäyhtälöt-kappaleisiin yhteensä 3 x 75 min.

3.2 Käyrien väliset leikkauspisteet

Tämän kappaleen tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää, mitä yhtälöiden määräämien käyrien leikkauspisteellä tarkoitetaan graafisesti
- osaa määrittää yhtälöiden määräämien käyrien leikkauspisteen graafisesti
- osaa määrittää yhtälöiden määräämien käyrien leikkauspisteen algebrallisesti yhtälöryhmän avulla
- osaa yhdistää leikkauspisteiden käsitettä myös tilanteisiin, joissa koordinaatiston akselit kuvaavat jotakin fysikaalista suuretta
- kehittää argumentointitaitojaan
- rohkaistuu hyödyntämään graafista esitystapaa algebrallisen esitystavan tukena tehtävien ratkaisemisessa ja ratkaisujen tarkistamisessa

Pohdinta A.1

Tehtävän tarkoituksena on opettaa, mitä yhtälöiden määräämien käyrien leikkauspisteillä tarkoitetaan ja miten ne ratkaistaan, kun käyrien yhtälöt tunnetaan. Varmista opiskelijoiden ymmärtävän, että leikkauspisteessä sekä matka että aika saavat yhtä suuret arvot. (c)-kohdassa voi johdatella opiskelijoita pohtimaan, minkä muuttujien arvojen täytyy olla yhtä suuret leikkauspisteessä. (d)-kohdassa oikean lausekkeen saaminen on varsinaisten leikkauspisteiden laskemista tärkeämpää.

Vastaukset: (a) $t = 8$, $s = 16$ (b) matka ja aika (c) $s_j = s_p$ (d) $-\frac{1}{2}x^2 + 2 = \frac{1}{2}x^2 - 4$

Pohdinta A.4

Tarkoituksena syventää ymmärrystä leikkauspisteistä ja kehittää matemaattisia argumentointitaitoja. Opiskelijoita kannattaa rohkaista piirtämään kuvia ja perustelemaan omia päättelyitään myös graafisesti. Kahdeksas kohta on haastava ja tarkoitettu vain etevämmille opiskelijoille, sillä sen ratkaiseminen vaatii käyrien yhtälöiden pyörittämistä.

Vastaukset: 1.Aina 2.Aina 3.Ei koskaan 4.Joskus (esimerkiksi paraabelit $y = x^2$ ja $x = y^2 - 2y$ leikkaavat neljässä pisteessä, mutta paraabelit $y = x^2$ ja $y = -x^2$ vain yhdessä pisteessä) 5.Joskus 6.Joskus (jos ympyröillä on samat keskipisteet) 7.Ei koskaan 8.Aina

Pohdinta A.5

Tehtävässä yhtälöparien-ja ryhmien ratkaisuja lähestytään graafisesti kuvaajien avulla. Tavoitteena on oppia, että käyrien leikkauspisteet voidaan määrittää käyrien funktioista muodostettujen yhtälöryhmien avulla.

Vastaukset: (a) $(-1, 0), (1, 0)$ ja $(2, 0)$ (b) $(-1, 0), (1, 0)$ (c) Ei ratkaisuja.

Harjoitustehtävät

Kun opiskelijat alkavat tekemään harjoitustehtäviä, kannattaa rohkaista heitä piirtämään jatkuvasti ajattelua tukevia kuvia. Oppilailta ei tule rajoittaa teknisten apuvälineiden käyttöä, sillä tehtävät on suunniteltu siten, että laskimen ja esimerkiksi geogebran käyttö eivät tee tehtävistä liian helppoja, ellei niiden käyttöä ole erikseen kielletty.

Hyvä kysymys, joka kannattaa esittää opiskelijoille, on *"Olisiko tämän ongelman voinut ratkaista jollakin muulla tavalla?"* Koska jo pelkästään yhtälöryhmän voi ratkaista useammalla tavalla, voi kysymys herättää oppilaissa keskustelua ja kehittää oppilaiden joustavuutta ongelmanratkaisussa. Opiskelijat voivat myöskin löytää graafisia ratkaisumalleja algebrallisten ratkaisujen rinnalle.

3.3 Itseisarvoyhtälöt

Tämän kappaleen tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää itseisarvojen merkityksen etäisyyden ilmoittajana
- osaa purkaa itseisarvoyhtälön osiin hyödyntämällä algebrallista määritelmää
- osaa piirtää itseisarvokuvaajia joko algebrallista määritelmää tai peilausominaisuutta hyödyntäen
- oppii ratkaisemaan muotoja $|f(x)| = p(x)$ ja $|f(x)| = |g(x)|$ olevia yhtälöitä
- ymmärtää, mitä itseisarvoyhtälöjen $|f(x)| = |g(x)|$ ratkaisut tarkoitavat graafisesti
- kehittää joustavuuttaan tehtävien ratkaisumetodien valinnassa
- rohkaistuu hyödyntämään graafista esitystapaa algebrallisen esitystavan tukena tehtävien ratkaisemisessa ja ratkaisujen tarkistamisessa

Pohdinta B.1

Itseisarvoyhtälöt-kappaleen ensimmäisen pohdintatehtävän B.1 tarkoituksena on saada opiskelijat ymmärtämään, mitä itseisarvojen lisääminen todellisuudessa tekee kuvaajille. Opiskelijat voivat tarvita apua Geogebran käytössä, jolloin opettajan voi olla hyvä aluksi hieman ohjata toimintaa. Pohdintatehtävän viimeinen kohta haastaa opiskelijoita keksimään funktioita, jotka eivät leikkaa omia itseisarvokuvaajiaan. Tällaisia ovat kaikki funktiot, joiden kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella. Opettaja voi haastaa myös nopeimpia opiskelijoita keksimään funktioita, joilla on tasan yksi tai kaksi yhteistä pistettä omien itseisarvokuvaajiensa kanssa.

Pohdinta B.3

Tehtävässä tarkoituksena on määrittää itseisarvofunktion lauseke, kun tiedetään kaksi pistettä jotka sen tulee toteuttaa. Tehtävän voi tehdä helpoiten siten, että peilaa toisen pisteistä x-akselin alapuolelle ja ratkaisee suoran yhtälön. Tämän jälkeen itseisarvofunktion saa lisäämällä itseisarvomerkit. Toinen tapa, joka on vaikeampi, on merkitä nousevaa suoraa $y_1 = k + b$, jolloin toisen suoran on oltava $y_2 = -k - b$. Tämän jälkeen vakioiden k ja b arvot voidaan selvittää yhtälöparin avulla, sillä molemmilta suorilta tunnetaan yksi piste. Tehtävä voidaan tehdä myös täysin Geogebran avulla hyödyntämällä esimerkiksi peilausominaisuutta.

Vastaukset: Pallon liikettä mallintava itseisarvofunktio on $y = |-2x+13|$ (tai vastaavasti $y = |2x - 13|$) ja pallo ei mene nurkkapussiin, sillä piste $(10, 6)$ ei toteuta yhtälöä.

Pohdinta B.4

Tehtävä sisältää neljä käyrää, joiden itseisarvokäyrät pitäisi tunnistaa vieressä olevien käyrien joukosta. Tehtävä sisältää yhden ylimääräisen käyrän, jolloin se myös opettaa, että kahdella toisistaan eroavalla käyrällä voi olla täysin identtiset itseisarvokuvaajat. Opettaja voi haastaa nopeimpia oppilaita kysymällä, millaisiin mahdollisiin käyriin itseisarvokäyrä H voisi yhdistyä.

Vastaukset: Ratkaisuparit ovat A-F, B-G, C-E ja D-F.

Pohdinta B.5

Tehtävä yhdistelee graafista esitystä muuten algebralliseen tehtävään. Muistuta itseisarvojen graafisesta merkityksestä esimerkiksi sanallistamalla tehtävän (b)-kohta muotoon *"Millä x:n arvolla funktion $f(x)$ kohtisuora etäisyys x-akselista on täsmälleen kaksi?"* Näyttämällä opiskelijoille esimerkin siitä, kuinka tehtäviä voidaan sanallistaa, antaa se opiskelijoille mahdollisuuden sanallistaa tehtävän muita kohtia, esimerkiksi kohdan (c) muotoon *"Missä pisteissä funktiot f ja g ovat yhtä kaukana x-akselista?"* Sanallistaminen tekee tehtävistä konkreettisempia ja helpottaa kuvaajien tulkitsemista.

Vastaukset: (a) Ei ratkaisua (b) $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 2$ (c) $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 2$

Pohdinta B.10

Tavoitteena on, että opiskelijat oppisivat joustavuutta ratkaisuissa ja valitsemaan tehtävien kannalta parhaimpia ratkaisustrategioita. Tehtävän (d)-kohta osoittaa, että neliöönkorotus johtaa joskus tilanteeseen, jossa törmätään korkeamman asteen yhtälöön.

Vastaukset: (a) Minni hyödyntää itseisarvojen määritelmää, kun taas Iines korottaa molemmat puolet neliöön. (b) Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten ne voidaan korottaa neliöön. (c) Mielipidekysymys. (d) Itseisarvojen määritelmän hyödyntäminen ei johda ongelmiin korkeiden potenssien kanssa.

Harjoitustehtävät

Tehtäväosiossa opettajan kannattaa jälleen ohjata opiskelijoita hyödyntämään graafisia esitystapoja tehtävien ratkaisemiseksi. Tutkimusten mukaan opiskelijat, jotka hyödyntävät graafisia esitystapoja ratkaisuissaan, saavat yleensä ratkaistua tehtävät paremmin ja oppivat niistä enemmän.

3.4 Itseisarvoepäyhtälöt

Tämän kappaleen tavoitteena on, että opiskelija

- osaa purkaa itseisarvoepäyhtälön osiin hyödyntämällä itseisarvon algebrallista määritelmää
- harjaantuu epäyhtälöiden ratkaisemisessa
- oppii käyttämään oikein loogisia yhdyssanoja *ja* ja *tai*
- oppii ratkaisemaan erilaisia epäyhtälöitä sekä graafisesti että algebrallisesti
- ymmärtää, mitä itseisarvoepäyhtälöjen ratkaisut tarkoitavat graafisesti
- kehittää joustavuuttaan tehtävien ratkaisumetodien valinnassa
- rohkaistuu hyödyntämään graafista esitystapaa algebrallisen esitystavan tukena tehtävien ratkaisemisessa ja ratkaisujen tarkistamisessa

Pohdinta C.1

Huomioi matemaattisten merkintöjen kirjoittaminen (a)-kohtaan joko kaksoisepäyhtälöllä tai *ja*-sanaa käyttämällä.

Vastaukset: (a) Lämpötilojen on oltava suurempia tai yhtäsuuria kuin -20 celsiusastetta ja pienempiä tai yhtäsuuria kuin 100 celsiusastetta. (b) Lämpötilojen on oltava suurempia kuin 100 astetta tai pienempiä kuin -20 astetta.
(c) a-kohdan vastaus: $-20\,°\mathrm{C} \leq T \leq 100\,°\mathrm{C}$
b-kohdan vastaus: $T < -20\,°\mathrm{C}$ tai $100\,°\mathrm{C} < T$

Pohdinta C.3

Tarkoituksena on lähteä yhdistelytehtävän kautta lähestymään itseisarvoepäyhtälöitä. Jos kuvaajien yhdistäminen funktioihin tuottaa vaikeuksia, voit johdatella oikeisiin vastauksiin pyytämällä opiskelijoita kokeilemaan eri x:n arvoja ja tutkimaan, mitä arvoja funktio saa näissä pisteissä.

Vastaukset: Vasemman yläkulman kuvaaja yhdistyy itseisarvoepäyhtälöön (b) ja sen vastaus on väli (v). Oikean yläkulman kuvaaja yhdistyy itseisarvoepäyhtälöön (c) ja sen vastaus on (iii). Vasemman alakulman kuvaaja yhdistyy itseisarvoepäyhtälöön (d) ja vastaukseen (iv). Viimeisen kuvaajan itseisarvoepäyhtälö on (a) ja vastaus (ix).

Pohdinta C.5

Varmista opiskelijoiden ymmärtävän, että esimerkiksi $x < -2 \iff x \in]-\infty, -2[$, jotta ei jää käsitystä että ratkaisu rajoittuu vain kuvan alueelle. Tehtävän (d)-kohtaa tehdessä voi olla fiksua pyytää opiskelijoita ensin sanallistamaan ratkaisua, jolloin ratkaisun kirjoittaminen helpottuu.

Vastaukset: (a) $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 2$
(b) $x < -2$ tai $-1 < x < 1$ tai $x > 2$
(c) $-2 < x < -1$ tai $1 < x < 2$
(d) $|f(x)| > 2 \iff f(x) > 2$ tai $f(x) < -2$
$|f(x)| < 2 \iff -2 < f(x) < 2$

Pohdinta C.8

Opiskelijoiden on tärkeää huomata, että näissä erityistapauksissa tehtävän ratkaisemisen voi tehdä päättelemällä. Tehtävän yhteydessä kannattaa vielä palata huomautuksiin C.6 ja C.7, joissa vakio a on määritelty ei-negatiiviseksi luvuksi.

Vastaukset: (a) Toinen yhtälö on totta kaikilla muuttujan x arvoilla (joilla funktio on määritelty) ja toinen yhtälö toteutuu ainoastaan niillä muuttujan x arvoilla, joilla $f(x) = 0$. (b) Toinen yhtälö on totta kaikilla muuttujan x arvoilla ja toinen yhtälö ei toteudu millään muuttujan x arvolla.

Pohdinta C.11

Koska itseisarvoepäyhtälöt on tutkimusten mukaan parasta opettaa kuvaajien avulla, opetetaan niiden ratkaisu etäisyystulkinnan avulla ennen neliöönkorotusta ja lokerointikeinoa. Tehtävää voi helpottaa neuvomalla opiskelijoita miettimään miltä itseisarvokuvaaja näyttäisi tai jopa piirtämään itseisarvokuvaajat.

Vastaukset: (a) $x > 0$ (b) $x = 0$ ja $x = 2$ (c) $x > 2$ (d) $0 \leq x \leq 2$

Pohdinta C.13

Tehtävä haastaa oppilaita keksimään itse tietyt ehdot täyttäviä itseisarvoepäyhtälöitä. Kannattaa ohjeistaa oppilaita miettimään mahdollisia ratkaisuja ennen kokeilemista eikä vain päästää heitä kokeilemaan geogebralla erilaisia yhtälöitä niin kauan, kunnes oikea yhtälö löytyy. Nopeimpia oppilaita kannattaa haastaa keksimään useampia ja vaikeampia vaihtoehtoja tehtäviin.

Vastaukset: Tehtäviin on useita eri vastauksia, mutta esimerkiksi (a) $|x - 2| \leq 0$ (b) $|x + 1| > 0$ (c) $|x| > x$ (d) $x^2 - 4 \leq 0$

Mallitehtävä C.14

Tehtävä opettaa itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisemisen lokeroinnin avulla. Ratkaisumalli on käyttökelpoisin tapa ratkaista vaikeampia itseisarvotehtäviä ilman kuvaajia. Voi kuitenkin olla, että laskinten kehittyessä aika on jo hieman ajanut ohi ratkaisutavasta, mutta sen voi jättää itsenäisesti katsottavaksi etevämmille oppilaille.

Harjoitustehtävät

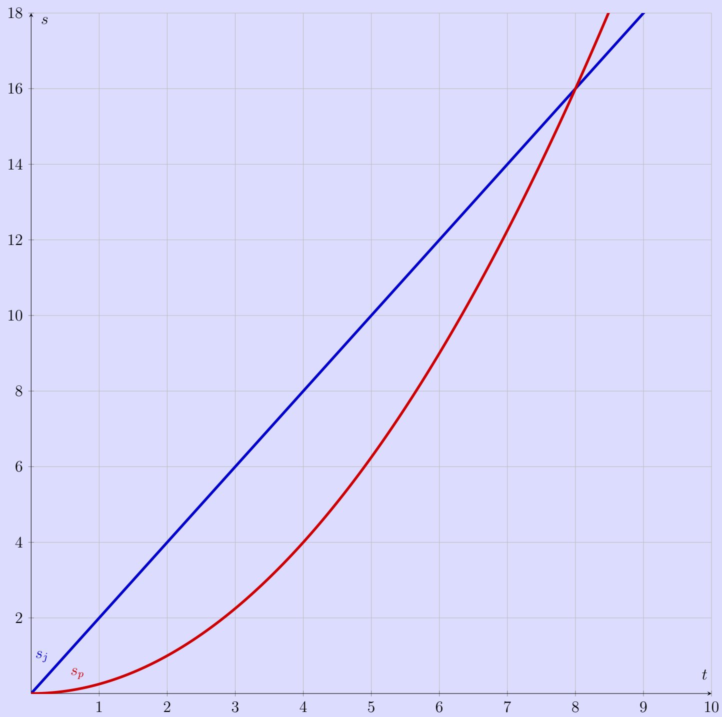
Harjoitustehtävässä 12 tarkastellaan yleisimpiä itseisarvotehtävissä tehtäviä virheitä, joita on lausekkeita yhdistävien välisanojen väärä käyttö, negatiivisella luvulla kertominen itseisarvomerkkejä kääntämättä ja itseisarvoepäyhtälön käsitteleminen kuten yhtälöiden käsittely. Lupun vastauksessa virhe tapahtuu itseisarvomerkkejä poistaessa, sillä Lupu on käsitellyt itseisarvoepäyhtälöä kuin itseisarvoyhtälöä.

Harjoitustehtävää 13 kannattaa lähteä purkamaan osissa miettien ensin itseisarvofunktiota kuvassa näkyvän funktion avulla, tämän jälkeen vakion arvo voidaan selvittää suorasta ja lopuksi voidaan päätellä ratkaisujoukon avulla funktioiden väliin tuleva epäyhtälön merkki.

Viimeisessä harjoitustehtävässä on hyvä huomioida neliöönkorotuksen mahdollisuus, vaikka tehtävässä esiintyykin toinen potenssi.

A Käyrien väliset leikkauspisteet

Edellisissä kappaleissa olet tutustunut erilaisten funktioiden määräämiin käyriin, kuten suoriin, paraabeleihin ja ympyröihin. Tässä kirjan kappaleessa pääset tutkimaan, milloin käyrät leikkaavat toisiaan eli onko käyrillä yhteisiä pisteitä.



Pohdinta A.1

Yllä oleva kuvaaja esittää pyöräilijän ja jalankulkijan paikkaa ajan funktiona. Jalankulkijaa kuvaa yhtälö $s_j = 2t$ ja pyöräilijää yhtälö $s_p = \frac{1}{4}t^2$, joissa $t \geq 0$. Oletetaan, että pyöräilijä ja jalankulkija lähtevät samasta paikasta ja liikkuvat samaan suuntaan.

(a) Missä kuvaajan pisteessä pyöräilijä ja jalankulkija kohtaavat lähdön jälkeen?

(b) Mitkä suureet saavat yhtä suuret arvot tässä pisteessä?

(c) Miten laskisit yhtälöitä käyttäen ne ajanhetket, joissa pyöräilijä ja jalankulkija ovat samassa pisteessä?

(d) Miten lasket funktioiden $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ ja $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ määräämien kuvaajien leikkauspisteet c-kohdan havaintoja käyttäen?

Määritelmä A.2 Yhtälöiden $F(x, y) = 0$ ja $G(x, y) = 0$ määräämien käyrien välinen leikkauspiste $P = (x, y)$ on piste, joka toteuttaa molempien käyrien yhtälöt eli kuuluu molemmille käyrille.

Kuten määritelmästä käy ilmi niin myös niitä pisteitä, joissa käyrät sivuavat toisiaan, kutsutaan käyrien leikkauspisteiksi.

Esimerkki A.3 a) Piste $P = (-3, 2)$ on käyrien $y - x^2 - 2x + 1 = 0$ ja $y = x + 5$ leikkauspiste, sillä sijoittamalla piste käyrien yhtälöihin toteutuvat molemmat yhtälöt:

$$\begin{aligned} y - x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ 2 - (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 1 &= 0 \\ 2 - 9 + 6 + 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= x + 5 \\ 2 &= -3 + 5 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

b) Piste $Q = (1, 6)$ ei ole käyrien $y - x^2 - 2x + 1 = 0$ ja $y = x + 5$ leikkauspiste, sillä sijoittamalla piste käyrien yhtälöihin toteutuu ainoastaan toinen yhtälö:

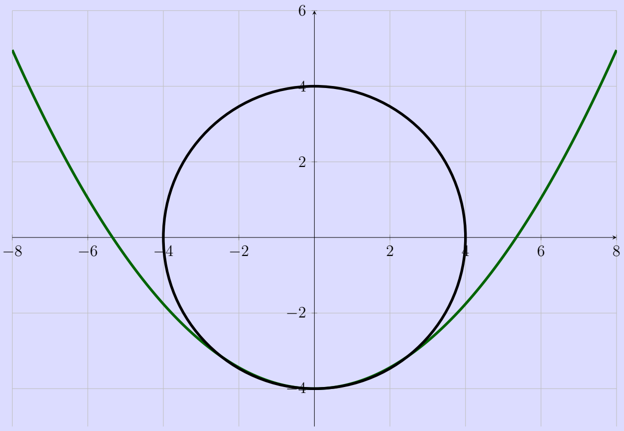
$$\begin{aligned} y - x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ 6 - (1)^2 - 2 \cdot 1 + 1 &= 0 \\ 6 - 1 - 2 + 1 &= 0 \\ 4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= x + 5 \\ 6 &= 1 + 5 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

Näin ollen piste Q kuuluu ainoastaan käyrälle $y = x + 5$.

Pohdinta A.4 Perustele parillesi, onko väite totta aina (A), joskus (J) vai ei koskaan (E).

1. Piste (x_0, y_0) sijaitsee sekä käyrällä s että käyrällä r. Käyrät s ja r leikkaavat toisensa.
2. Nollakohta on sama asia kuin leikkauspiste suoran $y = 0$ kanssa.
3. On mahdollista piirtää kaksi suoraa eri suurilla kulmakertoimilla siten, että ne eivät leikkaa toisiaan.
4. Kahdella paraabelilla on neljä yhteistä leikkauspistettä.
5. Ympyrällä A on suurempi tai yhtä suuri säde kuin ympyrällä B, ja ympyrän A keskipiste sijaitsee ympyrän B sisällä. Ympyrät leikkaavat toisensa.
6. Kahdella samansäteisellä ympyrällä on ääretön määrä leikkauspisteitä.

7. Ympyrällä ja paraabelilla voi olla enemmän kuin neljä leikkauspistettä.



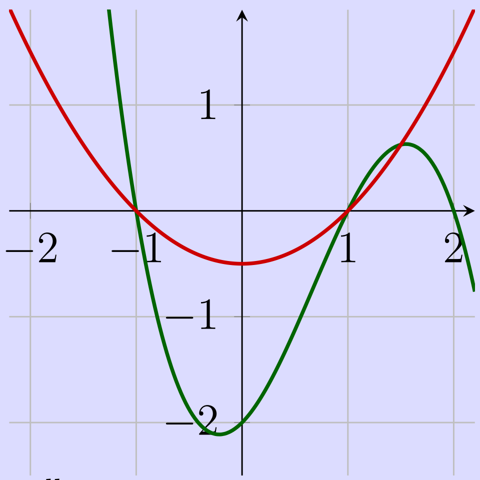
8. Paraabelilla $y = ax^2$ ja paraabelilla $x = by^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, on kaksi leikkauspistettä.

Kuten huomataan, leikkauspisteiden määrä riippuu käyrien muodosta ja sijainnista koordinaatistossa. Jos käyrät ovat päällekkäin, on leikkauspisteitä ääretön määrä. Leikkauspisteiden lukumäärää ja sijaintia voidaan arvioida kuvaajien perusteella, mutta niiden tarkkaan selvittämiseen on syytä kehitttää laskennallisempi menetelmä.

Pohdinta A.5 Yhtälöparin

$$\begin{cases} y = -(x-2)(x^2-1) \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

ratkaisut ovat pisteet (-1,0), (1,0) ja ($\frac{3}{2}$,$\frac{5}{8}$).



Ratkaise seuraavat tehtävät kuvan avulla.

(a) Mitkä ovat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = -(x-2)(x^2-1) \\ y = 0 \end{cases}$$

ratkaisut?

(b) Mitkä ovat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} y = -(x-2)(x^2-1) \\ y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

ratkaisut?

(c) Mitkä ovat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} y = -(x-2)(x^2-1) \\ y = x^2 - 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

ratkaisut?

Yhtälöiden $F(x,y) = 0$ ja $G(x,y) = 0$ määräämien käyrien väliset leikkauspisteet saadaan siis määritettyä ratkaisemalla yhtälöistä muodostettu yhtälöpari

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0. \end{cases}$$

Jos yhtälöryhmien ratkaiseminen on päässyt unohtumaan, voit kerrata sen MAA4 Vektorit-kurssin materiaaleista.

Leikkauspisteitä voidaan ratkaista yhtälöparien avulla, sillä kuten MAA4-kurssilta muistetaan, yhtälöparin ratkaisuna saadaan ne yhtälöparin muuttujien arvot, jotka ovat voimassa yhtä aikaa jokaiselle yhtälöparin yhtälölle. Täten yhtälöparin ratkaisuna saadaan ne pisteet, jotka toteuttavat samaan aikaa molemmat yhtälöt eli ovat käyrien leikkauspisteitä. Yhtälöpareja ratkaisemalla saadaan ratkaistua leikkauspisteiden koordinaatteja tarkasti, mutta koska menetelmä on virheherkkä, kannattaa vastaukset tarkistaa esimerkiksi piirtämällä funktioiden kuvaajia.

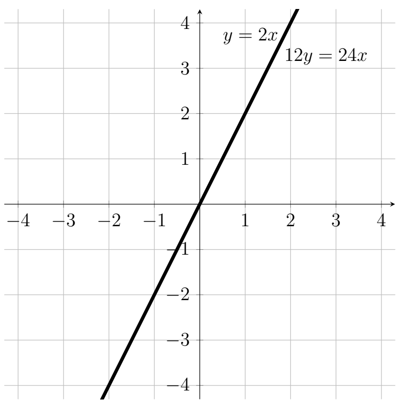
Lisätieto A.6 Jos haluat ratkaista useamman käyrän yhteiset leikkauspisteet, voit joko ratkaista yhtälöryhmän, jossa on mukana kaikki tutkimasi käyrät, tai laskea kahden käyrän leikkauspisteet ja tutkia tämän jälkeen kuuluvatko leikkauspisteet myös muille käyrille.

Mallitehtävä A.7 Ratkaise käyrien $y = 2x$ ja $12y = 24x$ leikkauspisteet.

Ratkaisu: Sijoittamalla yhtälöryhmän $\begin{cases} y = 2x \\ 12y = 24x \end{cases}$ ylempi yhtälö alempaan yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} 12 \cdot (2x) &= 24x \\ 24x &= 24x \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

joka on totta kaikilla muuttujan x arvoilla. Täten jokainen käyrän $y = 2x$ piste on käyrien leikkauspiste. Asia voidaan varmistaa vielä piirtämällä molempien funktioiden kuvaajat ja havaita, että kuvaajat ovat päällekkäin.



Huomautus A.8 Jos käyrien yhtälöistä muodostetulla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, käyrillä ei ole leikkauspisteitä.

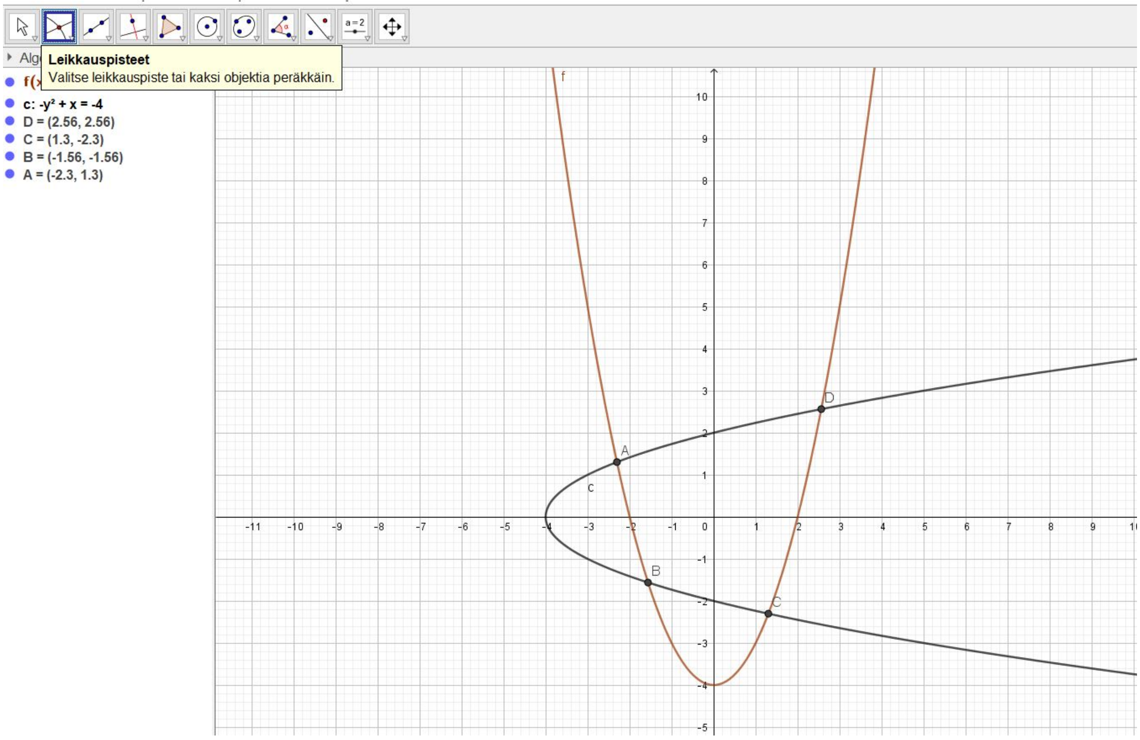
Yhtälöparien ratkaisuja on mahdollista selvittää myös käyttäen teknisiä apuvälineitä, kuten geogebraa. Geogebran CAS-laskimessa yhtälöryhmiä voidaan ratkaista komennolla *Ratkaise({ Haluamasi yhtälöt},{yhtälöissä esiintyvät muuttujat})*. Näin ollen esimerkiksi Pohdintatehtävän A.5 (b)-kohdan yhtälöryhmä voidaan ratkaista kirjoittamalla CAS-laskimeen komento *Ratkaise(*$\{y = -(x-2)(x^2-1), y = (x^2-1), y = 0\}, \{y, x\}$*)*

Huomaa, että selvittäessäsi käyrien leikkauspisteitä et voi antaa tehtävien vastauksina pelkkiä muuttujan x arvoja, vaan joudut selvittämään myös jokaista leikkauspistettä varten muuttujan x arvoa vastaavan y-koordinaatin.

Geogebralla voit myös selvittää minkä tahansa käyrien leikkauspisteiden koordinaatit muutamalla klikkauksella.

Mallitehtävä A.9 Selvitä funktioiden $y = x^2 - 4$ ja $x = y^2 - 4$ määräämien käyrien leikkauspisteet.

Ratkaisu: Geogebrassa voit selvittää käyrien leikkauspisteitä piirtämällä ensin käyrät ja valitsemalla tämän jälkeen valikosta käyttöön **Leikkauspisteet**-työkalun. Tämän jälkeen saat yksittäisen leikkauspisteen sijainnin selvitettyä klikkaamalla leikkauspistettä kuvasta tai käyrien kaikki leikkauspisteet selville klikkaamalla ensin toisesta ja tämän jälkeen toisesta käyrästä.



Voit lukea tarvitsemasi leikkauspisteiden koordinaatit vasemmalla näkyvästä listasta.

Vastaus: Käyrien leikkauspisteet ovat $(-2.3, 1.3)$, $(-1.56, -1.56)$, $(1.3, -2.3)$ ja $(2.56, 2.56)$.

Harjoitustehtävät leikkauspisteistä

1. Piirrä mahdollisista toisistaan eroavista tilanteista kuvat ja selvitä, montako leikkauspistettä on

(a) kahdella ympyrällä, jotka sivuavat toisiaan?

(b) kahdella suoralla, joilla on sama kulmakerroin?

(c) ympyrällä ja suoralla, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta?

(d) ympyrällä ja paraabelilla, jonka huippu on ympyrän kehällä?

2. Tarkastellaan käyriä $y = x^2 - 2$ ja $x^2 + (y-3)^2 = 25$.

(a) Ratkaise yhtälöparin avulla käyrien leikkauspisteet.

(b) Tutki, leikkaavatko käyrät myös käyrän $y_t = 3x - 2$ samoissa pisteissä

(i) sijoittamalla saamasi leikkauspisteet käyrän y_t yhtälöön

(ii) ratkaisemalla kolmen käyrän yhtälöryhmä laskinohjelmalla.

3. (a) Tutkitaan suoria $y = -2x - 1$ ja $y = 2x - 1$. Millä vakion a positiivisilla arvoilla paraabeli $y = ax^2$ ei leikkaa suoria?

(b) Millä vakion b arvolla ympyröillä $x^2 + y^2 = 4$ ja $(x-2)^2 + 4x + y^2 = b$ on ääretön määrä leikkauspisteitä?

4. Aku päättää lähteä kiertämään maailmaa kävellen hyväntekeväisyystarkoituksessa, ja kerää sponsoreita tukemaan tempaustaan. Yritys A lupaa Akulle 500 euron peruslahjoituksen ja euron lisää jokaista Akun kävelemää kilometriä kohti. Yritys B puolestaan lupaa Akulle 315 euron peruslahjoituksen, ja 1,25 euroa jokaista käveltyä kilometriä kohti. Mallinna Akun saamia rahamääriä kuvaajien avulla ja selvitä, kuinka paljon Akun pitää kävellä, jotta hän saisi täsmälleen yhtä paljon rahaa molemmilta yrityksiltä?
Vihje: *Aseta Akun saama rahamäärä y-akselille ja kilometrit x-akselille.*

5. Ratkaise yhtälöt käyttämättä laskinohjelmia (voit käyttää geogebraa kuvien piirtämiseen, mutta et sen CAS-laskinohjelmistoa).

(a) $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$

(b) $|x+2| - 1 = |x+4| + 1$

6. Tarkastellaan tasokäyrää, jonka yhtälö on $2x^2 + 2y^2 - 3xy - 2x + 2y - 4 = 0$.

(a) Määritä käyrän ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

(b) Osoita, että kaikki leikkauspisteet ovat saman ympyrän kehällä, ja määritä tämän ympyrän yhtälö.

(c) Suora kulkee origon ja b-kohdan ympyrän keskipisteen kautta. Missä pisteessä tämä suora leikkaa alkuperäisen käyrän?

(d) Onko alkuperäinen käyrä ympyrä? [S13/14]

B Itseisarvoyhtälöt

Kirjan alussa käsiteltiin itseisarvoja lukusuorien avulla. Kyseisestä kappaleesta muistetaan, että itseisarvo kuvaa lukujen välistä etäisyyttä. Tässä kappaleessa opit laajentamaan itseisarvon käsitettä funktioihin ja erityisesti niiden kuvaajiin sekä ratkaisemaan muotoa $|f(x)| = |g(x)|$ olevia itseisarvoyhtälöitä.

Pohdinta B.1 Avaa Geogebrassa ITSEISARVOFUNKTIOT-sovellus ja tutustu tehtävään. Kuten näet, geogebraan on piirretty funktion $f(x) = x + 3$ kuvaaja sekä merkitty näkyviin kaksi pistettä. Piste A on funktion f piste ja piste B on piste, joka on muuten kuin piste A, mutta sen y-koordinaatti on aina ei-negatiivinen. Se siis ilmaisee jatkuvasti funktion f kuvaajan kohtisuoraa etäisyyttä x-akselista. Tutki, miten piste B liikkuu tarttumalla kiinni pisteestä A ja liikuttele sitä pitkin kuvaajaa.

(a) Merkitse pisteen B jälki näkyviin. Ota tämän jälkeen kiinni pisteestä A ja liikuttele sitä pitkin funktiota. Millaisen jäljen piste B piirtää?

(b) Napsauta vasemmalta näkyvästä valikosta näkyviin funktion f itseisarvofunktio $h(x)$. Mitä havaitset?

(c) Poista itseisarvofunktio $h(x)$ näkyvistä ja siirrä piste A y-akselille. Tuplaklikkaa tämän jälkeen vasemmassa valikossa näkyvää funktiota $f(x) = x + 3$ ja piirrä funktion tilalle funktio $f(x) = x^2 - 2$. Toista vaiheet (a) ja (b).

(d) Koita keksiä sellaisen funktion yhtälö, jolla ei ole yhtään yhteistä pistettä oman itseisarvofunktionsa kanssa. Kirjoita funktion yhtälö geogebraan funktion $f(x)$ tilalle ja tutki, onnistuitko keksimään oikeanlaisen funktion.

Kuten edellisessä tehtävässä huomattiin, itseisarvojen lisääminen funktion yhtälöön muuttaa kuvaajassa vain x-akselin alapuolella olevien pisteiden paikkaa. Nämä x-akselin alapuolella olevat pisteet säilyttävät etäisyytensä x-akselista, mutta siirtyvät itseisarvojen lisäämisen jälkeen x-akselin yläpuolelle. Näin ollen $|f(x)|$ ilmaisee funktion f kohtisuoran etäisyyden x-akselista muuttujan arvolla x.

Kuten kirjan alussa käsitellystä itseisarvokappaleesta muistetaan, voidaan itseisarvofunktio kirjoittaa itseisarvon määritelmän nojalla kahteen osaan:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{kun} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{kun} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

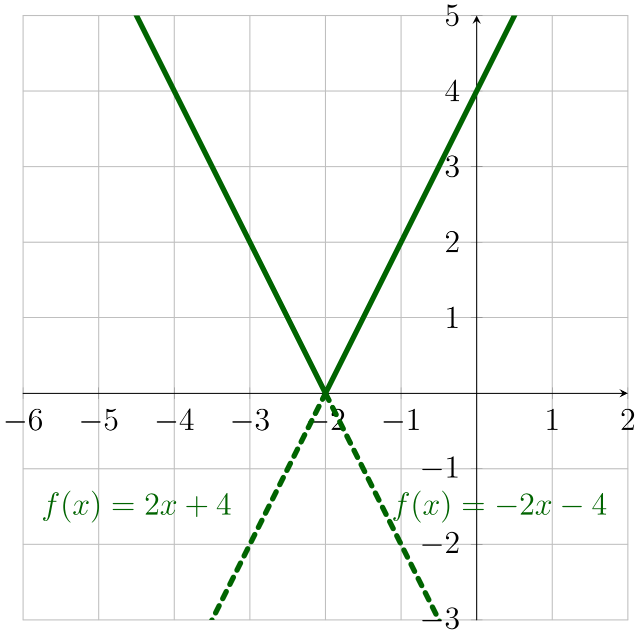
Mallitehtävä B.2 Piirrä funktion $f(x) = |2x+4|$ kuvaaja.

Ratkaisu: Funktion itseisarvomerkit saadaan poistettua itseisarvojen määritelmää käyttäen. Saadaan

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4, & \text{kun} \quad 2x+4 \geq 0 \\ -(2x+4), & \text{kun} \quad 2x+4 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x+4, & \text{kun} \quad x \geq -2 \\ -2x-4, & \text{kun} \quad x < -2. \end{cases}$$

Näin ollen funktion kuvaaja voidaan piirtää kahdessa osassa piirtämällä ensin suora $-2x-4$, kun $x < -2$ ja sitten suora $2x+4$, kun $x \geq -2$.



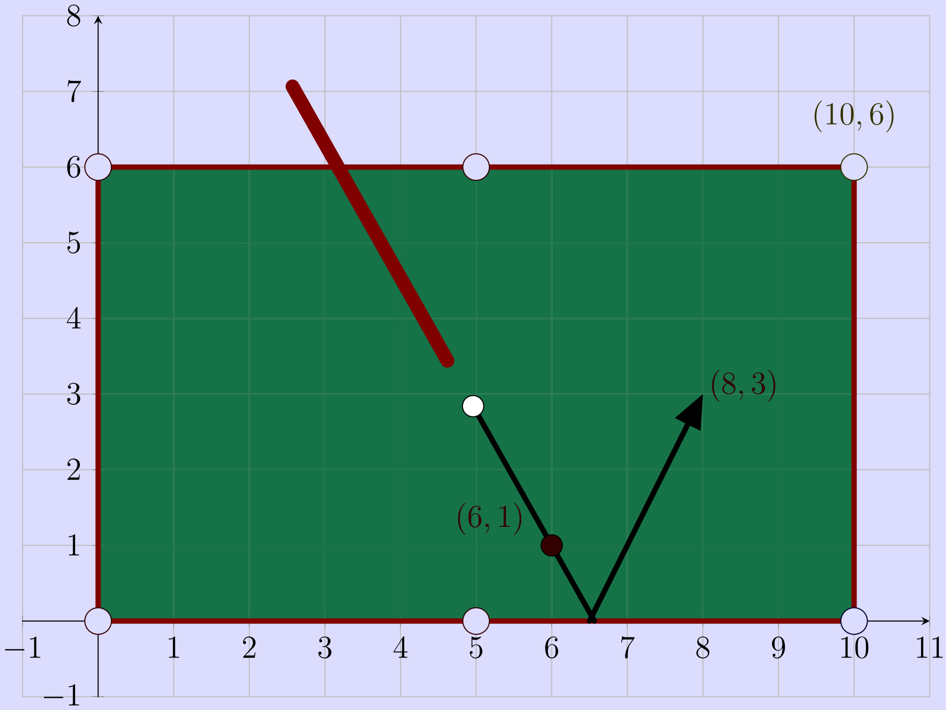
Kuvassa funktion $f = |2x+4|$ kuvaaja on yhtenäinen viiva, ja katkoviivalla piirretyt viivat ovat apuviivoja, jotka voidaan jättää myös piirtämättä.

Tarkastelemalla aikaisemmin piirrettyjä itseisarvokuvaajia tarkemmin huomataan, että itseisarvot *peilaavat* x-akselin alapuolelle jäävän osan x-akselin yläpuolelle. Tämä johtuu itseisarvon luonteesta etäisyyden ilmoittajana. Itseisarvofunktio ilmoittaa jokaisen funktion pisteen kohtisuoran etäisyyden x-akselista, ja koska etäisyys on aina positiivinen luku, peilaa itseisarvofunktio x-akselin alapuolella olevat pisteet x-akselin yläpuolelle.

Pohdinta B.3 Musta kasipallo sijaitsee koordinaatiston pisteessä $(6, 1)$. Sitä pyritään lyömään nurkkapussiin $(10, 6)$. Viivat havainnollistavat pallojen liikettä.

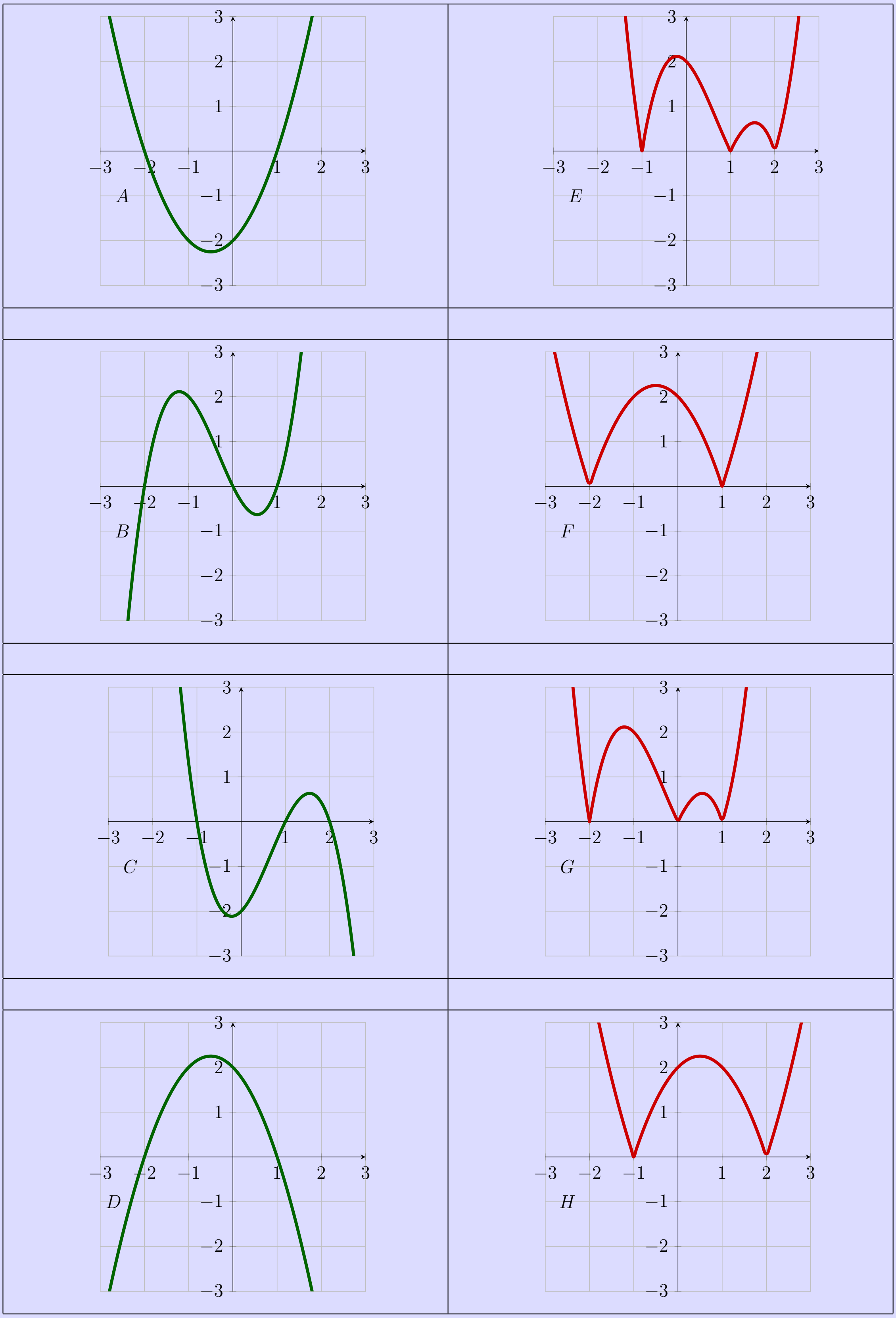
(a) Muodosta kasipallon liikettä mallintava itseisarvofunktio, kun pallo on aluksi pisteessä $(6, 1)$ ja sen tiedetään kulkevan pisteen $(8, 3)$ kautta.

(b) Selvitä, meneekö pallo nurkkapussiin.



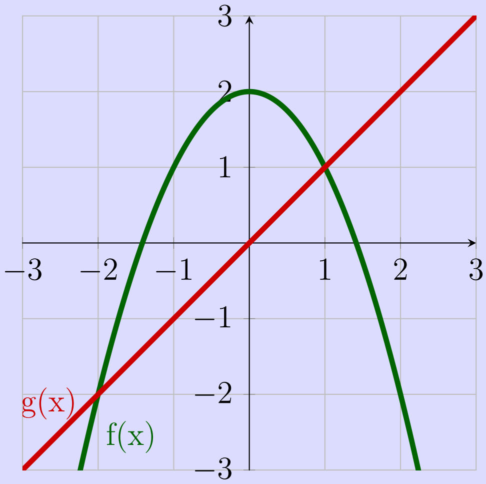
Seuraavan sivun pohdintatehtävässä tutustutaan vielä tarkemmin siihen, miten itseisarvot muuttavat funktioiden kuvaajia.

Pohdinta B.4 Etsi käyriä A-D vastaavat itseisarvokäyrät käyrien E-H joukosta.



Leikkauspisteet-kappaleesta muistetaan, että yhtälön $|f(x)| = a$ ratkaisuna saadaan käyrien $y = |f(x)|$ ja $y = a$ leikkauspisteet. Koska $y = |f(x)|$ kulkee aina x-akselilla tai sen yläpuolella, eivät käyrät voi leikata, kun a on negatiivinen. Kun a on ei-negatiivinen, käyrät kulkevat x-akselilla tai sen yläpuolella ja voivat leikata. Koska käyrä $|f(x)|$ ilmaisee käyrän $f(x)$ etäisyyttä x-akselista, leikkaavat käyrät $y = |f(x)|$ ja $y = a$ toisensa täsmälleen silloin kun käyrät $y = f(x)$ ja $y = a$ ovat yhtä kaukana x-akselista.

Pohdinta B.5 Vastaa kysymyksiin kuvan avulla.



Millä muuttujan x arvoilla

(a) $|f(x)| = -2$?

(b) $|f(x)| = 2$?

(c) $|f(x)| = |g(x)|$?

(d) $|f(x)| = g(x)$?

Kaksi käyrää ovat yhtä kaukana x-akselista täsmälleen silloin, kun niiden määräämien funktioiden arvot ovat samat tai toistensa vastaluvut. Täten yhtälö $|f(x)| = a$ saadaan sievennettyä muotoon $f(x) = \pm a$, kun $a \geq 0$.

Esimerkki B.6 (a) Yhtälöllä $|x + 3| = -2$ ei ole ratkaisuja.

(b) Yhtälön $|x + 3| = 3$ ratkaisuiksi saadaan $x + 3 = 3$ tai $x + 3 = -3$ eli $x = 0$ tai $x = 6$.

Mallitehtävä B.7 Ratkaise itseisarvoyhtälö $|2x-1| = 3x-3$.

Ratkaisu:

1. Kuten edellisestä kappaleesta muistetaan, yhtälön ratkaisut määrittävät nyt käyrien $y = |2x-1|$ ja $y = 3x-3$ leikkauspisteiden x-koordinaatit.

2. Koska yhtälön vasen puoli on itseisarvolauseke ja siten aina ei-negatiivinen, voivat käyrät leikata ainoastaan silloin, kun yhtälön oikea puoli saa ei-negatiivisia arvoja. Yhtälön oikea puoli $3x-3 \geq 0$, kun $x \geq 1$, joten tehtävän vastauksia voivat olla vain muuttujan x arvot, joilla $x \geq 1$.

3. Poistetaan seuraavaksi itseisarvo yhtälöstä itseisarvon määritelmää hyödyntäen:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{kun } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1), & \text{kun } 2x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1, & \text{kun } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1, & \text{kun } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

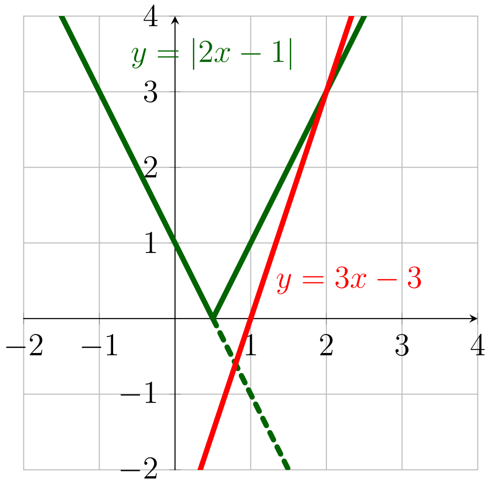
   Nyt $2x-1 = 3x-3$, kun $x \geq \frac{1}{2}$ ja $-2x+1 = 3x-3$, kun $x < \frac{1}{2}$.

   Koska jälkimmäisen yhtälön määrittelyehtona on $x < \frac{1}{2}$, ei yhtälön ratkaisut kelpaa tehtävän ratkaisuksi alkuehdon $x \geq 1$ vuoksi. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan ratkaisuksi $x = 2$.

4. Alkuehdon $x \geq 1$ nojalla vain $x = 2$ hyväksytään vastaukseksi.

   Jos toinen yhtälö ratkaistaisiin, saataisiin siitä vastaukseksi $x = \frac{4}{5}$. Ratkaisu ei toteuta myöskään yhtälössä mainittua määrittelyehtoa $x < \frac{1}{2}$.

   Vastaus: Itseisarvoyhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 2$.



Yllä olevaan kuvaan on piirretty funktiot $y = |2x-1|$ ja $y = 3x-3$. Minkä suorien leikkauspisteen x-koordinaatti toisesta yhtälöstä saatu $x = \frac{4}{5}$ kuvan perusteella on?

Lisätieto B.8 Jos mahdollista, kannattaa itseisarvoyhtälöiden vastaukset tarkistaa aina piirtämällä yhtälön molempien funktioiden kuvaajat ja katsoa, missä kuvaajat leikkaavat toisensa. Tällä tavoin huomaat myös, jos et ole osannut huomioida määrittelyehtoa tehtävien ratkaisujen karsimisessa.

Lause B.9 Funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ itseisarvot eli etäisyydet x-akselista ovat yhtä suuret vain silloin, kun funktioiden arvot ovat samat tai toistensa vastaluvut. Täten itseisarvoyhtälö

$$|f(x)| = |g(x)|$$

voidaan ratkaista kirjoittamalla yhtälö muotoon

$$f(x) = \pm g(x).$$

.

Pohdinta B.10 Tutustu Minnin ja Iineksen tapoihin ratkaista itseisarvoyhtälö $|3x + 2| = |x + 6|$ ja vastaa alla oleviin kysymyksiin.

Minnin ratkaisu	Iineksen ratkaisu
$\begin{aligned} \|3x+2\| &= \|x+6\| \\ 3x+2 &= \pm(x+6) \\ 3x+2 &= x+6 \quad \text{tai} \quad 3x+2 = -x-6 \\ 2x &= 4 \qquad\qquad\quad 4x = -8 \\ x &= 2 \qquad\qquad\quad\; x = -2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \|3x+2\| &= \|x+6\| \\ (3x+2)^2 &= (x+6)^2 \\ 9x^2+12x &= x^2+12x+36 \\ 8x^2 &= 32 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$

(a) Mitä menetelmää Minni käyttää itseisarvomerkkien poistamiseksi? Entä Iines?

(b) Miksi Iineksen käyttämä menetelmä itseisarvomerkkien poistamiseksi toimii?

(c) Kumpi menetelmä on mielestäsi parempi tehtävän ratkaisemisessa?

(d) Kummalla tavalla ratkaisisit itseisarvoyhtälön $|x^2 + 3x + 4| = |3x + 4|$? Miksi?

Joskus itseisarvoyhtälö voidaan ratkaista korottamalla yhtälön molemmat puolet neliöön. Näin voidaan tehdä, jos yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia.

Lause B.11 (Neliöönkorotuslause)

Jos luvut a ja b ovat ei-negatiivisia, seuraava ehto pätee:

$$a = b \text{ jos ja vain jos } a^2 = b^2.$$

Harjoitustehtävät itseisarvoyhtälöistä

7. Kirjoita ilman itseisarvoja (eli kirjoita lauseke paloittain itseisarvon määritelmää apuna käyttäen)

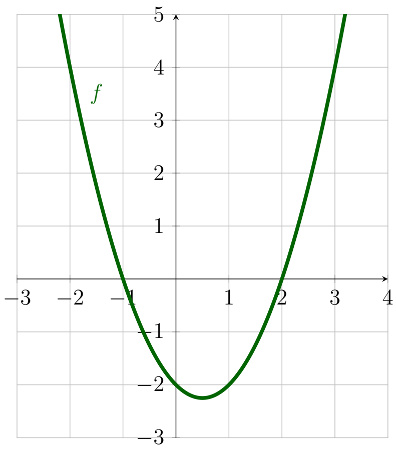
(a) $|x+2|$,

(b) $|x^2-4|$,

(c) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, kun $x \neq 1$.

8. Tee seuraava tehtävä ilman teknillisiä apuvälineitä.

(a) Piirrä koordinaatistossa näkyvän funktion f itseisarvofunktio $|f|$.



(b) Piirrä funktion $f(x) = -|2x+2|$ kuvaaja.

(c) Piirrä funktion $f(x) = |x^2-1| - 1$ kuvaaja.

9. Hessu on ratkaissut yhtälön

$$|x^2 - 4| + x = 2,$$

mutta välivaiheet ovat menneet sekaisin. Valitettavasti kohtaan (f) on myös unohtunut kirjoittaa tarkastelualueelta kelpaava arvo. Merkitse välivaiheet (b)-(h) oikeaan järjestykseen niin, että ne muodostavat yhtälön loogisesti etenevän ratkaisun ja täydennä vielä kohdasta (f) puuttuva vastaus.

(a) $|x^2 - 4| + x = 2$

(b) Tarkastelualueelta ratkaisuksi kelpaa arvot $x = -3$ ja $x = 2$.

(c)

$$\begin{aligned} x^2 - 4 + x &= 2 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

(d) Kun $-2 < x < 2$, yhtälö tulee muotoon

(e) Kun $x \leq -2$ tai $x \geq 2$, yhtälö tulee muotoon

(f) Tarkastelualueelta ratkaisuksi kelpaa arvo

(g) $|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{kun } x \leq -2 \\ -x^2 + 4, & \text{kun } -2 < x < 2 \\ x^2 - 4, & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}$

(h)

$$\begin{aligned} -x^2 + 4 + x &= 2 \\ -x^2 + x + 2 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \end{aligned}$$

10. Tee tehtävä ilman laskinta. Määritä ne muuttujan x arvot, joilla

(a) muuttujan x etäisyys luvusta miinus kolme on yhtä suuri kuin muuttujan x vastaluvun etäisyys luvusta 5.

(b) $|x^2 - 4| = |x - 2|$.

11. Tee tehtävä ilman laskinta.

Ratkaise yhtälö

$$|x|x + 2x + 1 = 0. \qquad \text{[S97/2]}$$

C Itseisarvoepäyhtälöt

Edellisessä kappaleessa opittiin ratkaisemaan itseisarvoyhtälöitä eli tutkimaan, millä muuttujan arvoilla funktioiden kuvaajat ovat yhtä kaukana x-akselista. Tässä kirjan kappaleessa funktioiden välissä oleva yhtäsuuruus-merkki korvataan epäyhtälöiden merkeillä eli aletaan tarkastelemaan tilanteita, joissa toisen funktion kuvaajan tulee olla kauempana x-akselista kuin toisen funktion kuvaajan. Kappaleen tarkoituksena on, että opit hyödyntämään edellisissä kappaleissa oppimiasi tietoja itseisarvoepäyhtälöihin ja ratkaisemaan lopulta muotoa $|f(x)| < |g(x)|$ olevia itseisarvoepäyhtälöitä sekä algebrallisesti, graafisesti että myös teknisiä apuvälineitä hyödyntäen.

Pohdinta C.1 Lämpölaajenemisen takia lasinen lämpömittari kestää vain lämpötiloja, jotka poikkeavat 40 celsiuasteesta enintään 60 asteen verran. Selitä sanallisesti, mille väleille sijoittuvat lämpötilat T, joita

(a) lämpömittarilla voidaan mitata?

(b) lämpömittarilla ei voida mitata?

Kokoa seuraavista rakennuspalasista matemaattiset vastaukset (a)-ja (b)-kohtiin:

T	20	40	$\geq$	$>$	JA
°C	-20	100	$\leq$	$<$	TAI

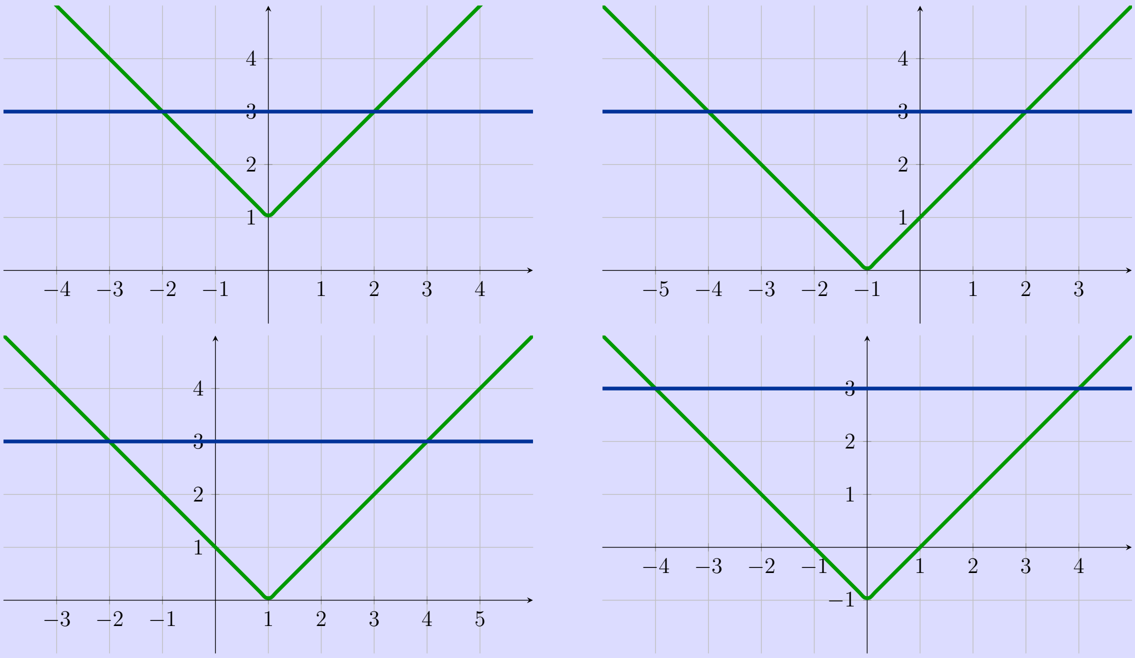
Itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisuina saadaan erilaisia ratkaisuvälejä, joissa oleellista on osata käyttää oikein *ja*- ja *tai*-sanoja. Jos ratkaisuna saadaan väli, jossa useamman ehdon pitää toteutua samanaikaisesti, käytetään ehtojen välissä *ja*-sanaa. Esimerkiksi yllä olevan pohdinnan C.1 (a)-kohdan ratkaisuksi saadaan lämpötilat, jotka ovat enintään 100 astetta *ja* vähintään -20 astetta. Ei siis riitä, että lämpötila toteuttaa vain toisen kahdesta ehdosta. *Tai*-sanaa käytetään, kun vain toisen ehdon toteutuminen riittää. Usein *tai*-ratkaisuissa saatavat ehdot ovat myös sellaisia, että molempien ehtojen toteutuminen samanaikaisesti ei olisi mahdollista. Esimerkiksi edellisessä tehtävässä se, että lämpötila olisi samanaikaisesti yli 100 astetta ja alle -20 astetta, on mahdotonta.

Määritelmä C.2 Itseisarvoepäyhtälössä verrataan kahden lausekkeen suuruutta käyttämällä jotain alla olevista epäyhtälömerkeistä.

Merkintä	Tarkoitus
$a < b$	a on pienempi kuin b
$a > b$	a on suurempi kuin b
$a \leq b$	a on pienempi tai yhtä suuri kuin b
$a \geq b$	a on suurempi tai yhtä suuri kuin b

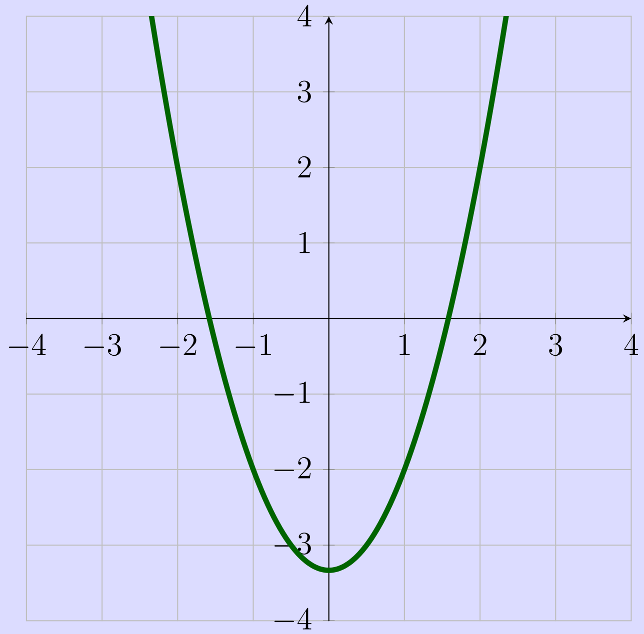
Pohdinta C.3 Yhdistä kuvaaja ja sitä vastaava itseisarvoepäyhtälö. Anna tämän jälkeen vielä itseisarvoepäyhtälön vastaus vaihtoehtojen (i)-(ix) joukosta.

(a) $|x| - 1 > 3$ (b) $|x| + 1 \leq 3$ (c) $|x + 1| < 3$ (d) $|x - 1| \geq 3$



(i) $-2 \leq x \leq 4$ (ii) $-4 < x$ ja $x > 4$ (iii) $-4 < x < 2$
(iv) $-2 \leq x$ tai $x \geq 4$ (v) $-2 \leq x \leq 2$ (vi) $-2 < x < 2$
(vii) $-4 \leq x \leq 2$ (viii) $x < -2$ tai $x > 2$ (ix) $-4 < x$ tai $x > 4$

Huomautus C.4 Huomaa, että jos epäyhtälössä on yhtäsuuruuden sisältävä merkki ($\leq$ tai $\geq$), myös käyrien leikkauspisteiden x-koordinaatit kuuluvat vastausalueeseen.



Pohdinta C.5

Kuten edellisestä luvusta muistetaan, ilmaisee funktion f itseisarvofunktio $|f|$ funktion f kuvaajan kohtisuoraa etäisyyttä x-akselista. Koordinaatistoon on piirretty funktion $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{10}{3}$ kuvaaja.

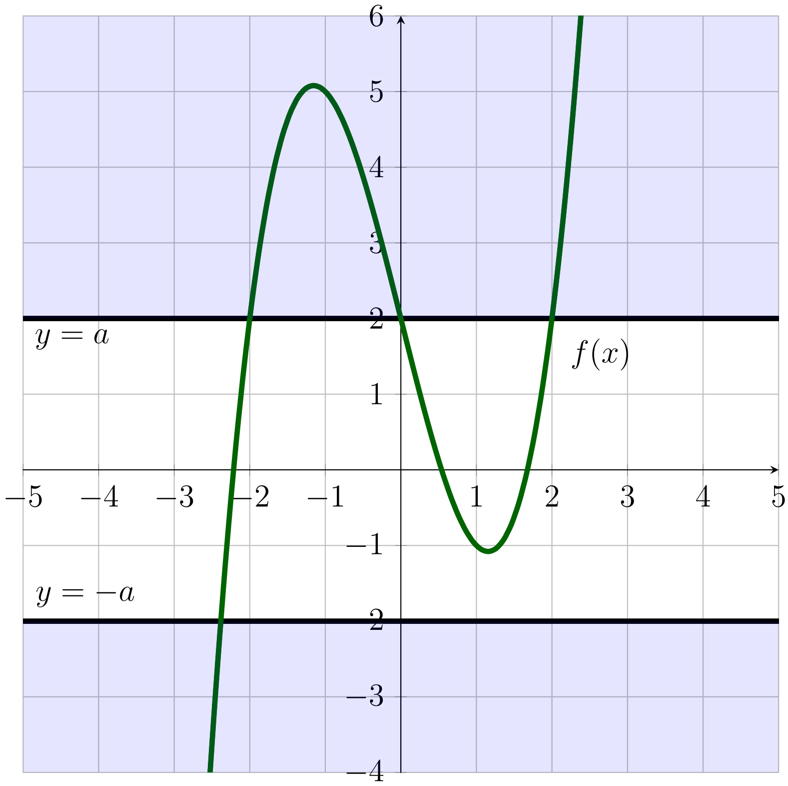
(a) Millä muuttujan x arvoilla funktion kuvaajan kohtisuora etäisyys x-akselista on tasan 2 eli milloin $|f(x)| = 2$?

(b) Millä muuttujan x arvoilla funktion kuvaajan kohtisuora etäisyys x-akselista on suurempi kuin 2 eli milloin $|f(x)| > 2$?

(c) Millä muuttujan x arvoilla funktion kuvaajan kohtisuora etäisyys x-akselista on pienempi kuin 2 eli milloin $|f(x)| < 2$?

(d) Edellisestä luvusta muistetaan, että a-kohdan yhtälöstä $|f(x)| = 2$ voidaan poistaa itseisarvomerkit kirjoittamalla yhtälö muotoon $f(x) = -2$ tai $f(x) = 2$. Mieti, miten saat poistettua itseisarvomerkit vastaavalla tavalla (b) -ja (c)-kohtien epäyhtälöistä.

Jotta funktion $f(x)$ etäisyys x-akselista voi olla suurempi kuin vakio a, pitää funktion arvojen olla joko x-akselin yläpuolella suurempia kuin a tai x-akselin alapuolella pienempiä kuin $-a$. Alla olevassa kuvassa tilannetta on havainnollistettu jakamalla alue lohkoihin. Näin ollen itseisarvoepäyhtälö $|f(x)| > a$ toteutuu kaikilla niillä muuttujan x arvoilla, joilla funktio saa sinisellä alueella olevia arvoja. Mikä merkitys on käyrien $f(x)$ ja $y = a$ sekä $f(x)$ ja $y = -a$ välisillä leikkauspisteillä?



Huomautus C.6 Epäyhtälön $|f(x)| > a$ ratkaiseminen, kun $a \geq 0$.

$\lvert f(x)\rvert > a$	Epäyhtälö puretaan kahdeksi epäyhtälöksi.
$f(x) < -a$ tai $f(x) > a$	Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt.

Vastaavasti, jos itseisarvoepäyhtälön merkki käännettäisiin muotoon $|f(x)| < a$, pitäisi funktion $f(x)$ etäisyyden x-akselista olla koko ajan pienempi kuin vakion a arvon eli sen pitäisi sijoittua käyrien $y = a$ ja $y = -a$ väliin. Yllä olevassa kuvassa tätä tilannetta havainnollistaa valkoisena oleva alue.

Huomautus C.7 Epäyhtälön $|f(x)| < a$ ratkaiseminen, kun $a \geq 0$.

$\lvert f(x)\rvert < a$	Epäyhtälö muutetaan kaksoisepäyhtälöksi.
$-a < f(x) < a$	Kaksoisepäyhtälö voidaan purkaa kahdeksi epäyhtälöksi.
$-a < f(x)$ ja $f(x) < a$	Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt.

Pohdinta C.8 Tarkastele erikseen tapauksia $|f(x)| \leq a$ ja $|f(x)| \geq a$.

(a) Mitä tapahtuu itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisuille, jos $a = 0$?

(b) Mitä tapahtuu itseisarvoepäyhtälön ratkaisuille, jos $a < 0$?

Mallitehtävä C.9 a) Ratkaise epäyhtälö $|x-3| > 6$ b) Ratkaise epäyhtälö $|2x+4| \leq 8$

Ratkaisu: a)

$\lvert x-3\rvert > 6$	Epäyhtälö puretaan kahdeksi epäyhtälöksi.
$x-3 < -6$ tai $x-3 > 6$	Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt.
$x < -3$ tai $x > 9$	Ratkaisulle saadaan kaksi ehtoa.

Vastaus: Epäyhtälö toteutuu, kun $x < -3$ tai $x > 9$.

(Tarkista vastaus piirtämällä funktio $f(x) = |x-3|$ Geogebraan ja tutki, onko funktio kyseisillä muuttujan x arvoilla vähintään etäisyydellä 6 x-akselista.)

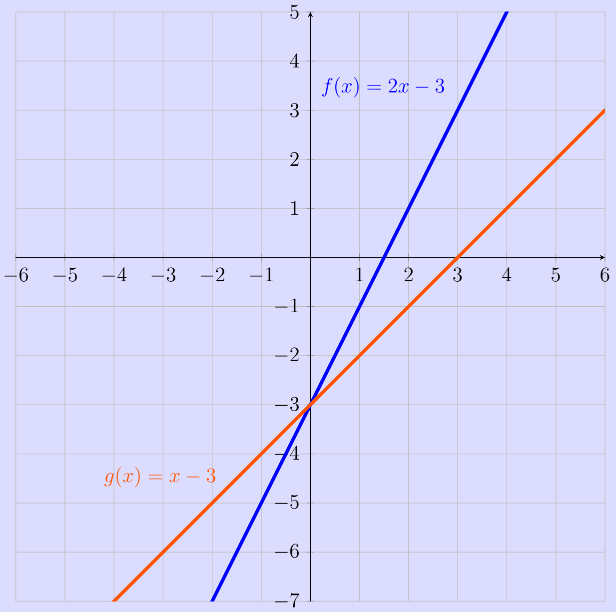
b)

$\lvert 2x+4\rvert \leq 8$	Epäyhtälö muutetaan kaksoisepäyhtälöksi.
$-8 \leq 2x+4 \leq 8$	Kaksoisepäyhtälö voidaan purkaa kahdeksi epäyhtälöksi.
$-8 \leq 2x+4$ ja $2x+4 \leq 8$	Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt.
$-12 \leq 2x$ ja $2x \leq 4$	
$-6 \leq x$ ja $x \leq 2$	

Vastaus: Epäyhtälö toteutuu, kun $-6 \leq x$ ja $x \leq 2$ eli kun $-6 \leq x \leq 2$

Huomautus C.10 Huomaa erot *tai*- ja *ja*-sanojen käytössä. Mallitehtävän b)-kohdassa molempien ehtojen pitää toteutua samanaikaisesti, joten lausekekiden välissä käytetään *ja*-sanaa. Näin ollen yhtälö ei siis toteudu esimerkiksi x:n arvolla 3, koska vaikka 3 on suurempi luku kuin -6, jää jälkimmäinen ehto toteutumatta. Kun käytetään lausekkeiden välissä *tai*-sanaa, riittää että toinen ehdoista toteutuu.

Pohdinta C.11 Vastaa kuvan avulla kysymyksiin.



(a) Millä muuttujan x arvoilla $x - 3 < 2x - 3$?

(b) Millä muuttujan x arvoilla suorat ovat yhtä kaukana x-akselista?

(c) Millä muuttujan x arvoilla $|x - 3| < 2x - 3$?

(d) Millä muuttujan x arvoilla $|x - 3| \geq |2x - 3|$?

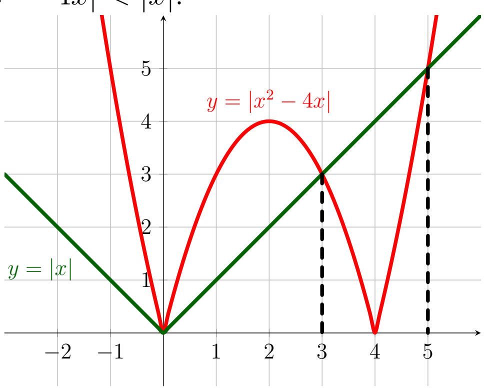
Niissä pisteissä, joissa funktiot ovat yhtä kaukana x-akselista, on keskeinen asema itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisujen kannalta. Tämä johtuu siitä, että näissä pisteissä itseisarvofunktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa. Usein helpoin keino itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisemiseksi onkin selvittää ensin, missä pisteissä kuvaajat leikkaavat ja tämän jälkeen mallintaa ratkaisua esimerkiksi kuvan avulla.

Mallitehtävä C.12 Ratkaise epäyhtälö $|x^2 - 4x| < |x|$.

Vieressä olevan kuvan punaisella näkyvä käyrä $y = |x^2 - 4x|$ saa vihreällä näkyvää käyrää $y = |x|$ pienempiä arvoja ainoastaan, kun

$$3 < x < 5.$$

Näin ollen epäyhtälön $|x^2 - 4x| < |x|$ ratkaisu on $3 < x < 5$.



Pohdinta C.13 Voit käyttää Geogebraa apuna tehtävän ratkaisujen etsimisessä.

(a) Anna esimerkki itseisarvoepäyhtälöstä, jolla on ratkaisuna ainoastaan muuttujan x arvo $x = 2$.

(b) Anna esimerkki itseisarvoepäyhtälöstä, jolla on ratkaisuna kaikki muut muuttujan x arvot paitsi $x = -1$.

(c) Anna esimerkki itseisarvoepäyhtälöstä, jolla on ratkaisuna kaikki muuttujan x negatiiviset arvot.

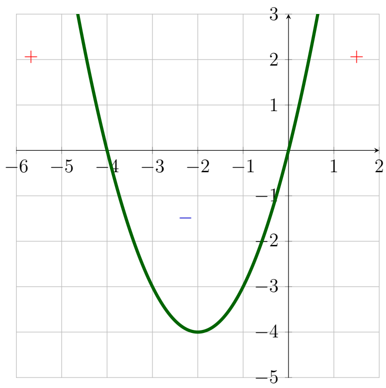
(d) Anna esimerkki itseisarvoepäyhtälöstä, jolla on ratkaisuna ainoastaan kaksi muuttujan x arvoa.

Koska teknisten apuvälineiden käyttäminen ja tarkkojen kuvien piirtäminen ei aina ole mahdollista, on alla esitelty tapa itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisemiseksi puhtaasti algebrallisin keinoin.

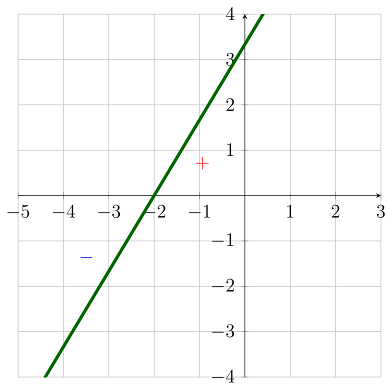
Mallitehtävä C.14 Ratkaise itseisarvoepäyhtälö

$$\left|x^2 + 4x\right| < \left|\frac{5}{3}(x+2)\right|$$

Ratkaisu: Ratkaistaan aluksi molempien itseisarvojen sisällä olevien funktioiden nollakohdat, joita voidaan myöhemmin hyödyntää tehtävän ratkaisussa. Funktion $x^2 + 4x$ nollakohdat ovat $x = -4$ ja $x = 0$. Funktion $\frac{5}{3}(x+2)$ nollakohta on $x = -2$.



Funktio $x^2 + 4x$ on ylöspäin aukeava paraabeli, joten se saa negatiivisia arvoja ainoastaan sen nollakohtien $x = -4$ ja $x = 0$ välissä.



Funktio $\frac{5}{3}(x+2)$ sen sijaan on nouseva suora, joka saa negatiivisia arvoja nollakohdan $x = -2$ vasemmalla puolella.

Nyt itseisarvoepäyhtälöstä

$$\left|x^2 + 4x\right| < \left|\frac{5}{3}(x+2)\right|$$

voidaan poistaa itseisarvomerkit tapauskohtaisesti lokeroimalla yhtälö nollakohtien avulla ja hyödyntämällä funktioiden yllä selvitettyjä merkkejä. Esimerkiksi kun poistetaan itseisarvoja vasemmalla olevasta lokerosta, tarkastellaan funktioiden $x^2 + 4x$ ja $\frac{5}{3}(x+2)$ merkkejä silloin, kun muuttuja x saa pienempiä arvoja kuin -4. Piirretyistä funktioista havaitaan, että funktio $x^2 + 4x$ saa tällöin positiivisia arvoja ja funktio $\frac{5}{3}(x+2)$ negatiivisia arvoja, joten itseisarvoja poistaessa suoran yhtälön eteen pitää lisätä miinusmerkki.

-4 -2 0

$\lvert x^2+4x \rvert < \lvert \frac{5}{3}(x+2) \rvert$	$\lvert x^2+4x \rvert < \lvert \frac{5}{3}(x+2) \rvert$	$\lvert x^2+4x \rvert < \lvert \frac{5}{3}(x+2) \rvert$	$\lvert x^2+4x \rvert < \lvert \frac{5}{3}(x+2) \rvert$
$x^2+4x < -(\frac{5}{3}(x+2))$	$-(x^2+4x) < -(\frac{5}{3}(x+2))$	$-(x^2+4x) < \frac{5}{3}(x+2)$	$x^2+4x < \frac{5}{3}(x+2)$
$x^2 + \frac{17}{3}x + \frac{10}{3} < 0$	$-x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{10}{3} < 0$	$-x^2 - \frac{17}{3}x - \frac{10}{3} < 0$	$x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{10}{3} < 0$
$-5 < x < -\frac{2}{3}$	$x < -\frac{10}{3}$ tai $x > 1$	$x < -5$ tai $x > -\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3} < x < 1$

Tämän jälkeen itseisarvoepäyhtälön vastaus voidaan lukea lokeroista. Saaduista ratkaisuista varsinaisen itseisarvoepäyhtälön ratkaisuiksi käyvät ne, jotka kuuluvat kussakin lokerossa olevalle tarkasteluvälille. Näin ollen esimerkiksi vasemmalla lokerossa olevista muuttujan x ratkaisuista vastaukseen käy väli $-5 < x \leq -4$, sillä ratkaisuista vastaukseen käyvät arvot, jotka ovat pienempiä kuin -4. Funktioiden nollakohdat on syytä tutkia aina tapauskohtaisesti. Toisen lokeron ratkaisuista itseisarvoepäyhtälön ratkaisuksi käy väli $-4 \leq x < -\frac{10}{3}$, kolmannen lokeron ratkaisuista väli $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ ja neljännen lokeron ratkaisuista väli $0 \leq x < 1$. Yhdistämällä nämä saadaan koko itseisarvoepäyhtälön ratkaisuiksi välit

$$-5 < x < -\frac{10}{3}$$

ja

$$-\frac{2}{3} < x < 1.$$

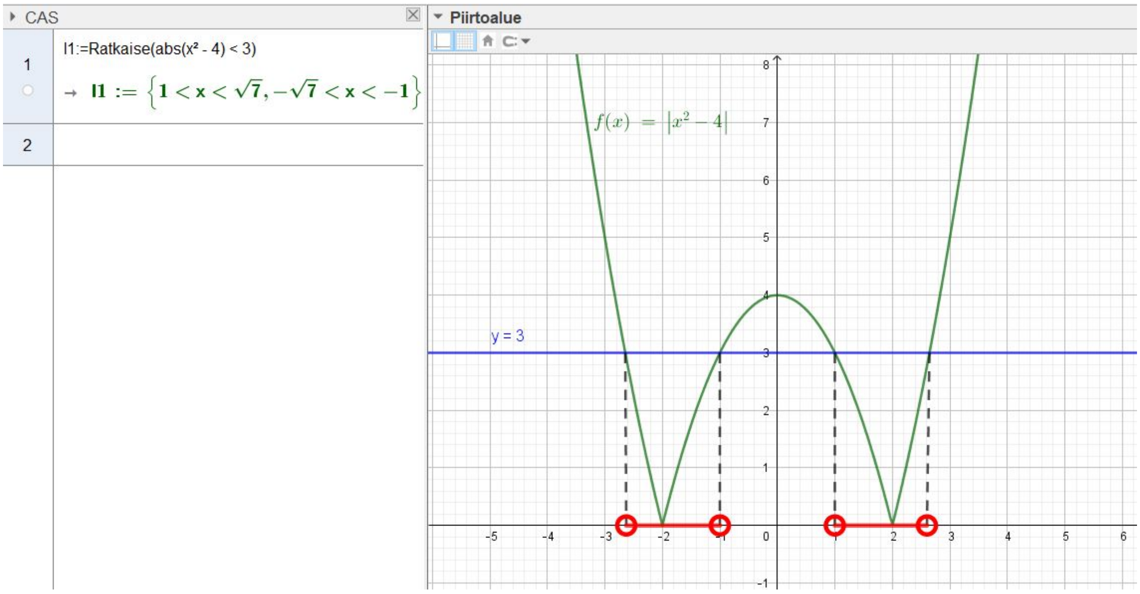
Kuten yllä olevasta mallitehtävästä huomataan, on lokerointi työläs ja pitkä tapa ratkaista tehtäviä. Jo edellisessä luvussa tutustuttiin neliöönkorotukseen, joka oli kätevä tapa yksinkertaisempien itseisarvoyhtälöiden ratkaisemiseen. Vastaavaa keinoa voidaan hyödyntää myös itseisarvoepäyhtälöiden tapauksessa, sillä neliöönkorotuslausetta voidaan laajentaa koskemaan myös itseisarvoepäyhtälöitä.

Lause C.15 (Neliöönkorotuslause)

Jos luvut a ja b ovat ei-negatiivisia, seuraavat ehdot pätevät:
a) $a = b$ jos ja vain jos $a^2 = b^2$,
b) $a < b$ jos ja vain jos $a^2 < b^2$.

Kehittyneet laskimet kykenevät ratkaisemaan itseisarvoepäyhtälöitä tarkasti. Esimerkiksi geogebran CAS-laskimella saat ratkaistua itseisarvoepäyhtälön kirjoittamalla laskimeen *Ratkaise(Haluamasi yhtälö, jossa muuttujana x)* ja painamalla enteriä, jolloin saat tarkan vastauksen itseisarvoepäyhtälöllesi.

Mallitehtävä C.16 Ratkaise itseisarvoepäyhtälö $|x^2 - 4| < 3$ ja havainnollista ratkaisuja kuvan avulla.



Geogebrassa ratkaisua havainnollistavaan kuvaan on piirretty näkyviin funktio $f(x) = |x^2 - 4|$ sekä vakiosuora $y = 3$. Tämän jälkeen vastausjoukkoja on havainnollistettu piirtämällä janat (katkoviivalla) funktioiden leikkauspisteistä x-akselille ja vielä erityisesti korostettu ratkaisuvälejä piirtämällä punaiset janat x-akselille. Kuvassa on kaikki oleellinen tieto ratkaisun kannalta ja siitä käy selkeästi ilmi se, miksi itseisarvoepäyhtälön ratkaisuna saadaan kyseiset ratkaisuvälit.

Harjoitustehtävät itseisarvoepäyhtälöistä

12. Tarkastele Tupun, Hupun ja Lupun tapoja ratkaista itseisarvoepäyhtälö $|-x-1| > 2$.

Tupu: Piirsin funktioiden $y = |-x-1|$ ja $y = 2$ kuvaajat geogebraan. Käyrä $|-x-1|$ on kuvaajan $y = 2$ yläpuolella, kun $x > 1$ ja $x < -3$, joten vastaus on $x < -3$ ja $x > 1$.

Hupu: $-x$:n etäisyys luvusta 1 on oltava suurempi kuin 2. Lukusuoran piirtämällä näemme, että kun $x < -1$ tai $x > 3$, x:n etäisyys luvusta 1 on suurempi kuin 2. Näin ollen $-x$:n etäisyydet saadaan muuttamalla luvut negatiivisiksi. Täten vastaus on $x > -3$ tai $x < 1$.

Lupu: Poistan itseisarvomerkit itseisarvojen algebrallisen määritelmän avulla:

$$
\begin{aligned}
|-x-1| &> 2 \\
-x-1 &> \pm 2 \\
-x-1 &> -2 && \text{tai} \quad -x-1 > 2 \\
-x &> -1 && \qquad\qquad -x > 3 \\
x &< 1 && \qquad\qquad\ \ x < -3
\end{aligned}
$$

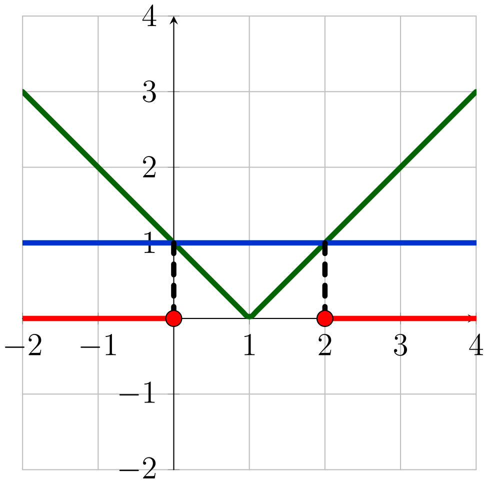
Näin ollen vastaus on $x < 1$ tai $x < -3$.

(a) Tutki, kenen ratkaisut ovat vääriä.

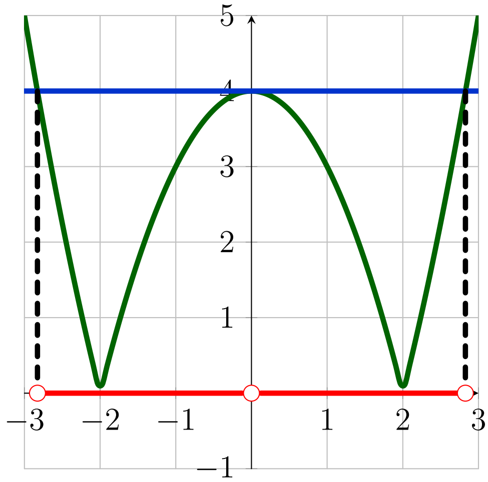
(b) Selvitä, mikä väärissä ratkaisuissa menee pieleen ja kirjoita väärien ratkaisujen tekijöille neuvot, joita noudattamalla he saavat tehtävän tehtyä seuraavalla kerralla oikein.

13. Kuvissa on esitetty itseisarvofunktio (vihreällä) ja vakiofunktio (sinisellä). Kirjoita itseisarvoepäyhtälö, jossa esiintyy kuvan funktiot ja jonka ratkaisujoukkona on x-akselilla näkyvä ratkaisujoukko (punaisella).

a)



b)



14. Ratkaise ilman teknisiä apuvälineitä yhtälö

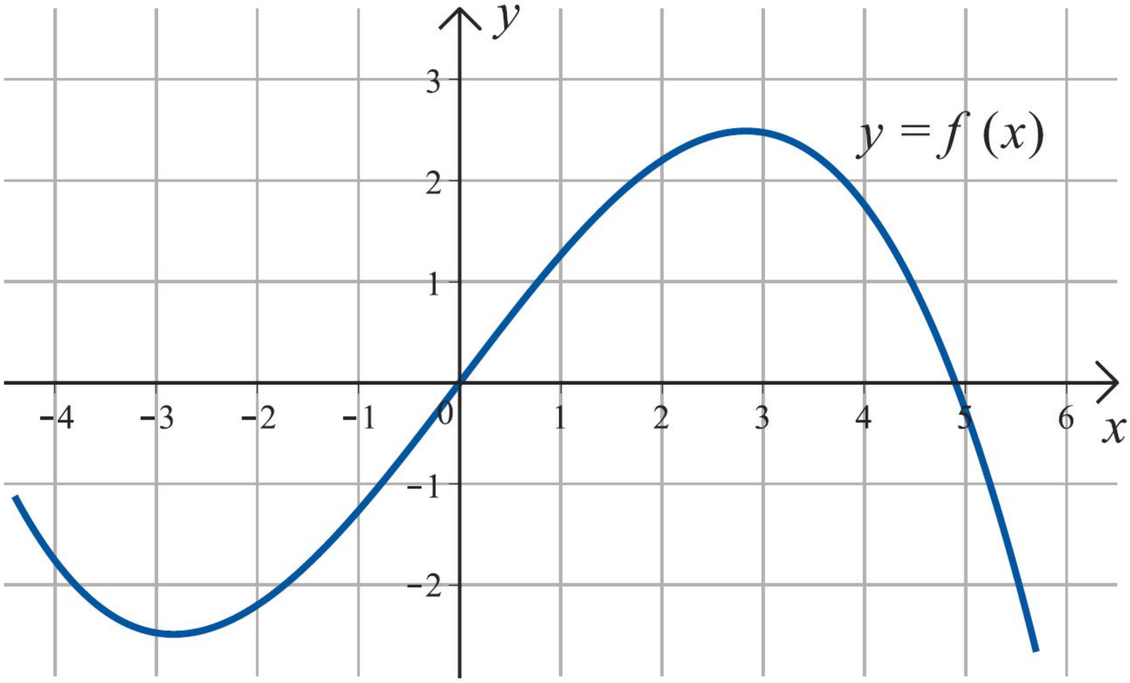
$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} \leq |7x + 5|.$$

15. Ratkaise arvioiden oheisen kuvaajan perusteella

(a) yhtälö $|f(x)| = 2$,

(b) epäyhtälö $|f(x) - 1| < 1$.

Anna vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella. [S17/3]



D Tehtävien vastaukset

1.

(a) Yksi leikkauspiste (ympyrät vierekkäin tai toinen ympyrä toisen sisällä).

(b) Suorat ovat joko päällekkäin, jolloin niillä on ääretön määrä leikkauspisteitä, tai suorat eivät leikkaa ollenkaan.

(c) Kaksi leikkauspistettä.

(d) Yksi leikkauspiste (jolloin paraabeli vain sivuaa ympyrää) tai kolme leikkauspistettä.

2.

(a) Leikkauspisteet ovat $(-3, 7)$, $(-2, 0)$ ja $(3, 7)$.

(b) Käyrät leikkaavat pisteissä $(-2, 0)$ ja $(3, 7)$, mutta eivät pisteessä $(-3, 7)$.

3.

(a) $a > 1$

(b) $b = 8$

4. Akun pitää kävellä 740 kilometriä, jolloin hän saa molemmilta yrityksiltä 1240 euroa.

5.

(a) Ei ratkaisuja.

(b) $x \leq -4$

6.

(a) Leikkauspisteet x-akselin kanssa: $(-1, 0)$ ja $(2, 0)$
Leikkauspisteet y-akselin kanssa: $(0, 1)$ ja $(0, -2)$

(b) Ympyrän yhtälö: $(x - 0.5)^2 + (y + 0.5)^2 = 2.5$

(c) $(\frac{2-4\sqrt{2}}{7}, \frac{-2+4\sqrt{2}}{7})$ ja $(\frac{2+4\sqrt{2}}{7}, \frac{-2-4\sqrt{2}}{7})$

(d) Ei.

7.

(a)

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{kun } \ x \geq -2 \\ -x-2, & \text{kun } \ x < -2 \end{cases}$$

(b)

$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, \text{ kun } x \leq -2 \\ -x^2+4, \text{ kun } -2 < x < 2 \\ x^2-4, \text{ kun } x \geq 2 \end{cases}$$

(c)

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}, \text{ kun } x \leq -1 \\ \dfrac{x+1}{1-x}, \text{ kun } -1 < x < 1 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$

8. Tarkista vastaukset piirtämällä funktiot geogebralla.

9. Oikea järjestys: a g e c b d h f (tai a g d h f e c b)
Kohdasta f puuttuva vastaus on $x = 1$.

10.

(a) $x = -4$

(b) $x = -3$, $x = -1$ tai $x = 2$

11. $x = -\sqrt{2} + 1$

12. Kaikki vastaukset ovat vääriä. Tupu käyttää sanaa *ja* sanan *tai* sijasta, Hupu ei muista kääntää epäyhtälömerkkejä negatiivisella luvulla kerrottaessa ja Lupu tekee virheen itseisarvomerkkejä poistettaessa.

13.

(a) $|x-1| \leq 1$

(b) $|x^2-4| < 4$

14. $x = -0.5$ tai $x = -1$

15.

(a) $x = 1.7$, $x = 3.7$, $x = 5.5$, $x = -1.7$ tai $x = -3.8$

(b) $0 < x < 1.7$ tai $3.7 < x < 4.9$